高中数学竞赛专题讲座

丛书策划 李胜宏
丛书主编 陶平生 苏建一
刘康宁 边红平

PINGMIANJIHE

平面几何

本书主编 虞金龙
马洪炎

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 平面几何 / 陶平生等主编.
杭州：浙江大学出版社，2007.6
ISBN 978-7-308-05231-3

Ⅰ.高... Ⅱ.陶... Ⅲ.几何课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 039723 号

平面几何

虞金龙 马洪炎 著

责任编辑	杨晓鸣 李梦婕
出版发行	浙江大学出版社 (杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028) (E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn) (网址: http://www.zjupress.com)
排 版	浙江大学出版社电脑排版中心
印 刷	浙江省临安市曙光印务有限公司
开 本	787mm×960mm 1/16
印 张	11.25
印 数	0001—6000
字 数	220 千
版 印 次	2007 年 6 月第 1 版 2007 年 6 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-308-05231-3
定 价	14.50 元

丛书编委会

编写说明

影响最大、级别最高的中学生“国际数学奥林匹克”(简称IMO)由来已久,自第1届IMO于1959年在罗马尼亚举行以来,有近60年的历史,其影响越来越广泛。在国际数学奥林匹克的推动下,世界各地的数学竞赛活动如火如荼。目前,我国数学竞赛逐步形成了从全国联合竞赛、全国中学生数学冬令营到国家集训队一个完整的竞赛选拔体系。

数学竞赛作为一项智力活动,吸引了无数数学爱好者积极参与,也为那些对数学有浓厚兴趣和有数学天赋的学生提供一个展示自我的平台,是发现和培养数学人才的一条有效渠道。我们欣喜地看到,通过这项活动,发现了一批数学苗子,培养了一批数学人才。许多参与竞赛的优秀选手后来都成了杰出的数学家。

总体看来,我国的数学竞赛体制日趋完善,它的一些功能和作用也日益凸显。随着高校招生制度的改革,各种学科竞赛,尤其是数学竞赛的选拔功能越来越被广大高校所认可。事实上,学科竞赛已经成为高校自主招生和选拔人才的重要途径之一。

我们本着为数学竞赛的普及、提高做点有益事情的愿望,在全国范围内组织一批长期从事数学竞赛且作出杰出成绩的一线专家编写了一套“高中数学竞赛专题讲座丛书”。丛书包括《初等数论》、《函数与函数方程》、《复数与多项式》、《不等式》、《组合问题》、《排列组合与概率》、《数列与归纳法》、《集合与简易逻辑》、《三角函数》、《立体几何》、《平面几何》、《解析几何》和《数学结构思想及解题方法》13种。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本数学思想、方法,凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是:

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题，通过对典型例题的解剖，传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有一定的指导作用和参考价值。

丛书由浙江大学数学系教授、博士生导师、全国数学奥林匹克竞赛领队李胜宏策划；丛书由陶平生、苏建一、刘康宁、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、苏建一、刘康宁、边红平、黄军华、王建中、岑爱国、韦吉珠、张雷、王俊明、李世杰、沈虎跃、斯理炯、虞金龙、马洪炎。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。

前　言

自公元前3世纪古希腊数学家欧几里得的《几何原本》问世以来，平面几何作为数学的一个分支而存在于世。在历史上，《几何原本》的问世奠定了数学科学的基础，平面几何提出的问题，诱发出了一个又一个重要的数学概念和有力的数学方法。由于平面几何有其鲜明的直觉与严谨、精确而简明的语言，并且经常出现一些极具挑战性的问题，因而这一古老的数学分支一直保持着青春的活力，青少年中的数学爱好者，大多数首先是平面几何的爱好者。世界各国无不将平面几何作为培养本国公民的逻辑思维能力、空间想象能力和推理能力的首选题材。正因为如此，在数学智力竞赛中，尤其在数学奥林匹克竞赛中，平面几何内容占据着十分显著的位置，如果我们把数学比作巍峨的宫殿，那么平面几何恰似这宫殿门前的五彩缤纷的花坛，它吸引着人们更多地去了解数学科学，研究数学科学。

数学难学，平面几何难学，这也是很多人感受到了的问题。目前市面上许多竞赛教辅书都涉及平面几何的内容，但大都不够全面，有些名家专著，虽有较详细的论述，但篇幅较长，高中学生很难抽时间仔细阅读。基于上述考虑，我参考了众多名家的专著和文章，结合自己多年来辅导竞赛的教学实际，编成这本《平面几何》教辅书，旨在给众多数学竞赛爱好者提供一定的帮助。挚友马洪炎一同编写了第四章《几何不等式与几何变换》，使本书又增色不少。在此对书中一些题目的作者表示感谢。

限于作者水平，书中出现错误也在所难免，敬请读者批评指正。

虞金龙

2007年5月于绍兴一中

目　录

第一章 平面几何中的重要定理

第 1 讲 梅涅劳斯定理和塞瓦定理

知识点金

欧几里得的《几何原本》问世以来，初等几何以其新奇、美妙、丰富、完美的内容和形式引发了历代数学家们浓厚的兴趣. 许多杰出的数学家为了探索几何学的奥秘而奉献了毕生的精力，他们发现了一个又一个新的定理，推动了几何学的迅速发展. 为纪念他们，人们以他们的名字来命名他们所获得的重要成果. 这些优秀成果如同璀璨的明珠照亮了几何学的历程.

梅涅劳斯定理和塞瓦定理就是其中最常用的两个定理.

梅涅劳斯是古希腊的著名几何学家，在他的几何著作《球论》中，他提出了"梅涅劳斯"这条著名的定理.

梅涅劳斯定理 设 A'、B'、C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或其延长线上的点，若 A'、B'、C' 三点共线，则 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$. ①

证明 如图 1-1，过 A 作直线 $AD\parallel C'A'$ 交 BC 的延长线于 D，则 $\frac{CB'}{B'A}=\frac{CA'}{A'D}$，$\frac{AC'}{C'B}=\frac{DA'}{A'B}$，故 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CA'}{A'D}\cdot\frac{DA'}{A'B}=1$.

评注 此定理的证明还有如下正弦定理证法及面积证法.

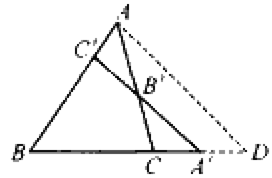


图 1-1

正弦定理证法 设$\angle BC'A'=\alpha$,$\angle CB'A'=\beta$,$\angle B'A'B=\gamma$,在$\triangle BA'C'$中,有$\frac{BA'}{C'B}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$,同理,$\frac{CB'}{CA'}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$,$\frac{AC'}{AB'}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$,此三式相乘即证.

面积证法 由$\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{\triangle A'C'B}}{S_{\triangle A'C'C}}$,$\frac{CB'}{B'A}=\frac{S_{\triangle CB'C'}}{S_{\triangle B'AC'}}=\frac{S_{\triangle CA'B'}}{S_{\triangle A'AB'}}=\frac{S_{\triangle CB'C'}+S_{\triangle CA'B'}}{S_{\triangle B'AC'}+S_{\triangle A'AB'}}=\frac{S_{\triangle C'CA'}}{S_{\triangle AC'A'}}$,$\frac{AC'}{C'B}=\frac{S_{\triangle AC'A'}}{S_{\triangle C'BA'}}$,三式相乘即证.

梅涅劳斯定理的逆定理 设A'、B'、C'分别是$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB或其延长线上的点,若

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1, \qquad ②$$

则A'、B'、C'三点共线.

证明 设直线$A'B'$延长线交AB于C_1,则由梅涅劳斯定理得$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$.

由题设,有$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$,即有$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC'}{C'B}$.

又由合比定理,知$\frac{AC_1}{AB}=\frac{AC'}{AB}$,故有$AC_1=AC'$,从而$C_1$与$C'$重合,即$A'$、$B'$、$C'$三点共线.

有时,也把上述两个定理合写为:设A'、B'、C'分别是$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB所在直线(包括三边的延长线)上的点,则A'、B'、C'三点共线的充要条件是

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1.$$

角元形式的梅涅劳斯定理 设A'、B'、C'分别是$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB所在直线(包括三边的延长线)上的点,则A'、B'、C'共线的充要条件是

$$\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}\cdot\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}=1. \qquad ③$$

证明 如图 1-2,可得

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{\triangle ABA'}}{S_{\triangle AA'C}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AA'\cdot\sin\angle BAA'}{\frac{1}{2}AA'\cdot AC\cdot\sin\angle A'AC}$$

$$=\frac{AB\cdot\sin\angle BAA'}{AC\cdot\sin\angle A'AC}.$$

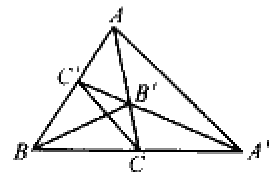


图 1-2

同理，$\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC\cdot\sin\angle CBB'}{AB\cdot\sin\angle B'BA}$，$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC\cdot\sin\angle ACC'}{BC\cdot\sin\angle C'CB}$.

以上三式相乘，再运用梅涅劳斯定理及其逆定理，知结论成立.

评注 上述各定理中，若采用有向线段或有向角，则①、②、③式中的右端均为 -1. ③式中的角也可以按①和②式中的对应线段记忆.

塞瓦(G·Ceva)是17世纪意大利水力工程师和数学家，他重新发现了梅涅劳斯定理，并根据梅涅劳斯定理推出了他自己的著名定理.

塞瓦定理 设 A'、B'、C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或其延长线上的点，若 AA'、BB'、CC' 三条线平行或共点，则 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$.

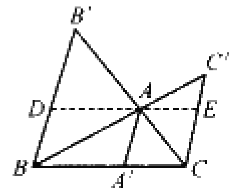


图 1-3

证明 如图 1-3，若 AA'、BB'、CC' 交于一点 P，则过 A 作 BC 的平行线，分别交 BB'、CC' 的延长线于 D、E，得 $\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC}{AD}$，$\frac{AC'}{C'B}=\frac{EA}{BC}$.

又由 $\frac{BA'}{AD}=\frac{A'P}{PA}=\frac{A'C}{EA}$，有 $\frac{BA'}{A'C}=\frac{AD}{EA}$.

从而 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{AD}{EA}\cdot\frac{BC}{AD}\cdot\frac{EA}{BC}=1$.

若 AA'、BB'、CC' 三条线平行，可类似证明(略).

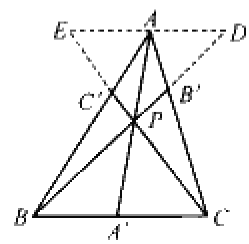


图 1-4

评注 对于图 1-4 也有如下面积证法：

由 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PCA}}\cdot\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle PAB}}\cdot\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle PBC}}=1$，即证.

塞瓦定理的逆定理 设 A'、B'、C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或其延长线上的点，若 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$，则 AA'、BB'、CC' 三条直线共点或三条直线互相平行.

证明 若 AA' 与 BB' 交于点 P，设 CP 与 AB 的交点为 C_1，则由塞瓦定理，有 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$. 又已知有 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$，由此得 $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC'}{C'B}$，即 $\frac{AC_1}{AB}=\frac{AC'}{AB}$，亦即 $AC_1=AC'$，故 C_1 与 C' 重合，从而 AA'、BB'、CC' 三线共点.

若 $AA'\parallel BB'$，则 $\frac{CB'}{B'A}=\frac{CB}{BA'}$. 代入已知条件，有 $\frac{AC'}{C'B}=\frac{A'C}{CB}$，由此知 $CC'\parallel AA'$，故 $AA'\parallel BB'\parallel CC'$.

上述两定理可合写为：设 A'、B'、C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 所在直线上的点，则三条直线 AA'、BB'、CC' 平行或共点的充要条件是 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$.

角元形式的塞瓦定理 设 A'、B'、C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 所在直线上的点，则三条直线 AA'，BB'，CC' 平行或共点的充要条件是

$$\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}\cdot\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}=1.$$

证明 由 $\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{\triangle ABA'}}{S_{\triangle AA'C}}=\frac{AB\cdot\sin\angle BAA'}{AC\cdot\sin\angle A'AC}$，$\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC\cdot\sin\angle CBB'}{AB\cdot\sin\angle B'BA}$，$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC\cdot\sin\angle ACC'}{BC\cdot\sin\angle C'CB}$，三式相乘，再运用塞瓦定理及其逆定理，知结论成立.

推论 设 A_1、B_1、C_1 分别是 $\triangle ABC$ 外接圆的三段弧 $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$ 上的点，则 AA_1、BB_1、CC_1 共点的充要条件是

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1.$$

证明 如图 1-5，设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，AA_1 交 BC 于 A'，BB_1 交 CA 于 B'，CC_1 交 AB 于 C'. 由 A、C_1、B、A_1、C、B_1 六点共圆及正弦定理，有 $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{2R\cdot\sin\angle BAA_1}{2R\cdot\sin\angle A_1AC}=\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}$.

同理，$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}$，$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}$.

三式相乘，并应用角元形式的塞瓦定理即证.

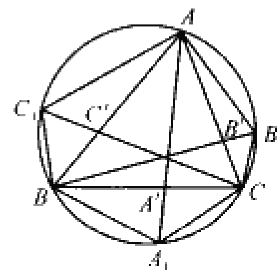


图 1-5

例题精析

例 1 （笛沙格定理）如图 1-6，由 O 引出的三条射线上各有两个点：A_1 和 A_2，B_1 和 B_2，C_1 和 C_2. 直线 B_1C_1 和 B_2C_2 交于点 X；直线 A_1C_1 和 A_2C_2 交于点 Y；直线 A_1B_1 和 A_2B_2 交于点 Z. 求证：X、Y、Z 三点共线.

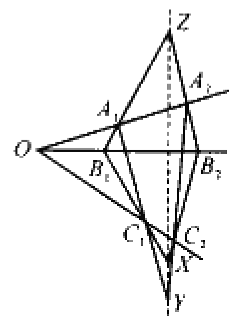


图 1-6

分析 当然稍微观察一下就会发现这个定理显然要使用梅氏定理来证明，因为题目几乎什么条件都没给，除了直线还是直线，所以迫不得已我们只好使用梅氏定理.

已知 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 XYZ 为梅氏线，只要证明 $\frac{A_1Z}{ZB_1}\cdot\frac{B_1X}{XC_1}\cdot\frac{C_1Y}{YA_1}=1$ 即可. 关键是这些比例我们都不知道，所以就要想办法转化条件. 注意到 $\frac{A_1Z}{ZB_1}$ 可以看成是在 $\triangle OA_1B_1$ 中 ZA_2B_2 为梅氏线时也用到的一个比例，所以，我们考虑

这个梅氏定理对应的式子：$\frac{OA_2}{A_2A_1}\cdot\frac{A_1Z}{ZB_1}\cdot\frac{B_1B_2}{B_2O}=1$. 由此知道$\frac{A_1Z}{ZB_1}=\frac{A_2A_1}{OA_2}\cdot\frac{B_2O}{B_1B_2}$.

这里，请读者要注意这样一个事实，就是 ABC 地位的轮换对称性。所以说，我们根本不需要去想剩下两个应该如何去转化，而只需要对上式的 ABC 进行轮换代入即可得到关于另外两个比例的转化式：$\frac{B_1X}{XC_1}=\frac{B_2B_1}{OB_2}\cdot\frac{C_2O}{C_1C_2}$，$\frac{C_1Y}{YA_1}=\frac{C_2C_1}{OC_2}\cdot\frac{A_2O}{A_1A_2}$（即第一个式子中见到 A 就用 B 代替，见到 B 就用 C 代替，见到 Z 就用 X 代替；第二个同理）. 这样可以大大减短思考问题的时间，而且还时刻保持了对称性.

当然在写证明的时候，我们最好还是不要点明的说这些对称性的东西，因为这些很多都是建立在感觉的基础之上，并不是特别的严格.

证明 在$\triangle OA_1B_1$ 中，ZA_2B_2 为梅氏线，由梅氏定理得：

$\frac{OA_2}{A_1A_2}\cdot\frac{A_1Z}{ZB_1}\cdot\frac{B_1B_2}{B_2O}=1$,

在$\triangle OB_1C_1$ 中，ZB_2C_2 为梅氏线，由梅氏定理得：

$\frac{OB_2}{B_2B_1}\cdot\frac{B_1X}{XC_1}\cdot\frac{C_1C_2}{C_2O}=1$,

在$\triangle OC_1A_1$ 中，ZC_2A_2 为梅氏线，由梅氏定理得：

$\frac{OC_2}{C_2C_1}\cdot\frac{C_1Y}{YA_1}\cdot\frac{A_1A_2}{A_2O}=1$,

将以上三式相乘得到：$\frac{A_1Z}{ZB_1}\cdot\frac{B_1X}{XC_1}\cdot\frac{C_1Y}{YA_1}=1$.

由梅氏逆定理得 X、Y、Z 共线.

评注 这个证明的基本想法就是利用梅氏定理转化线段比例，但最重要的是要时刻保持点的轮换对称性，这样给出的证明就显得很漂亮和干净.

例 2 如图 1-7，$\odot O_1$、$\odot O_2$ 和$\odot O_3$ 两两的外公切线分别交于点 P、Q 和 R. 求证：P、Q、R 三点共线.

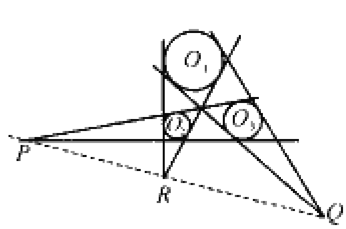


图 1-7

分析 1 我先说一个解法，这是由一种感觉带来的，因笔者第一次拿到题目时就有一个反应，是不是可以用笛沙格定理啊？在经过几组试验之后就给出了下面的解法.

证法 1 如图 1-8，考察标出的点组 A、B、C 和 O_1、O_2、O_3.

易见，AO_1、BO_2、CO_3 是$\triangle ABC$ 的三条角平分线，所以共点是自然的.

由笛沙格定理，得 P、Q、R 三点共线（P 是 BC 和 O_2O_3 的交点；Q 是 CA 和 O_3O_1 的交点；R 是 AB 和 O_1O_2 的交点）.

分析 2 其实我们完全不必去回忆刚才的那个解法，因为它需要太多的经验和技巧.

我们来回到我们惯用的思路，首先我们要看看要讨论问题主要涉及的 P、Q、R 三个点有什么性质. 事实上，如果你随便看一下就会发现 O_1、O_2、R，O_2、O_3、P，O_3、O_1、Q 分别共线. 由此我们自然会想到要用梅氏逆定理，去证明 $\frac{O_1R}{RO_2}\cdot\frac{O_2P}{PO_3}\cdot\frac{O_3Q}{QO_1}=1$. 这个证明简直易如反掌，简直不需要什么计算.

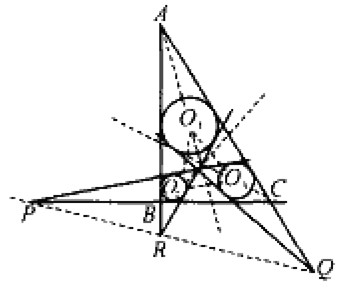


图 1-8

证法 2 如图 1-9，设三个圆的半径分别为 r_1、r_2、r_3.

易见 RO_1 和 RO_2 都是角 R 的平分线，所以 O_1、O_2、R 共线.

同理，O_2、O_3、P 和 O_3、O_1、Q 分别共线.

为证明 P、Q、R 三点共线，只要证明：$\frac{O_1R}{RO_2}\cdot\frac{O_2P}{PO_3}\cdot\frac{O_3Q}{QO_1}=1$.

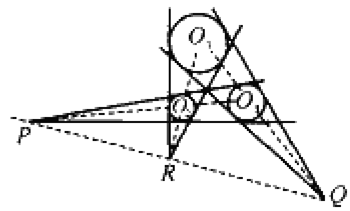


图 1-9

事实上，由相似易知 $\frac{O_1R}{RO_2}=\frac{r_1}{r_2}$，$\frac{O_2P}{PO_3}=\frac{r_2}{r_3}$，$\frac{O_3Q}{QO_1}=\frac{r_3}{r_1}$.

所以 $\frac{O_1R}{RO_2}\cdot\frac{O_2P}{PO_3}\cdot\frac{O_3Q}{QO_1}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2}{r_3}\cdot\frac{r_3}{r_1}=1$.

由梅氏逆定理知 P、Q、R 三点共线.

例 3 以 $\triangle ABC$ 的底边 BC 为直径作半圆，分别与边 AB、AC 交于点 D 和 E，分别过点 D、E 作 BC 的垂线，垂足依次为 F、G，线段 DG 和 EF 交于点 M. 求证：$AM\perp BC$.

证法 1 如图 1-10，记直线 AM 与 BC 交于点 H，连接 BE、CD. 有 $\angle BEC=\angle BDC=90^\circ$. 直线 FME 与 $\triangle AHC$ 相截，直线 GMD 与 $\triangle ABH$ 相截，由梅涅劳斯定理有

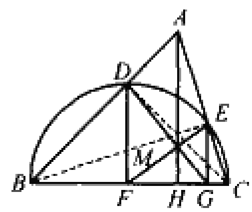


图 1-10

$$\frac{AM}{MH}\cdot\frac{HF}{FC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,\frac{AM}{MH}\cdot\frac{HG}{GB}\cdot\frac{BD}{DA}=1,$$

所以 $$\frac{FH}{HG}=\frac{CF\cdot AE\cdot BD}{CE\cdot BG\cdot AD}.\quad ①$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle DBC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle EBC$ 中应用射影定理有

$CD^2=BC\cdot FC$，$BE^2=BC\cdot BG$，

所以 $$\frac{CF}{BG}=\frac{CD^2}{BE^2}.\quad ②$$

将②代入①，得

$$\frac{FH}{HG}=\frac{CD^2\cdot AE\cdot BD}{BE^2\cdot CE\cdot AD}.\quad ③$$

因为 $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$，所以 $$\frac{CD}{BE}=\frac{AD}{AE},\quad ④$$

将④代入③，得

$$\frac{FH}{HG}=\frac{CD\cdot BD}{BE\cdot CE}=\frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle EBC}}=\frac{DF}{EG}=\frac{DM}{MG},$$

所以 $MH/\!/DF$.

因为 $DF\perp BC$，所以 $MH\perp BC$，

所以 $AM\perp BC$.

证法 2 作高 AH，连接 BE、CD. 于是$\angle BDC=90^\circ-\angle BEC$.

所以 $DF=BD\cdot\sin B=BC\cdot\cos B\cdot\sin B$，$EG=BC\cdot\cos C\cdot\sin C$，

所以$\dfrac{GM}{MD}=\dfrac{EG}{FD}=\dfrac{\cos C\cdot\sin C}{\cos B\cdot\sin B}=\dfrac{AB}{AC}\cdot\dfrac{\cos C}{\cos B}$.

因为 $BH=AB\cdot\cos B$，$HG=AE\cdot\cos C$，

所以$\dfrac{BH}{HG}=\dfrac{AB\cdot\cos B}{AE\cdot\cos C}=\dfrac{AC\cdot\cos B}{AD\cdot\cos C}$，所以$\dfrac{BH}{HG}\cdot\dfrac{GM}{MD}=\dfrac{AB}{AD}$，

所以$\dfrac{BH}{HG}\cdot\dfrac{GM}{MD}\cdot\dfrac{DA}{AB}=1$.

由梅涅劳斯定理的逆定理知 H、M、A 三点共线.

因为 $AH\perp BC$，所以 $AM\perp BC$.

我们再给出将梅涅劳斯定理与塞瓦定理联合使用证明的一种方法，如下.

证法 3 作高 AH，连接 BE、CD，则 AH、BE、CD 交于一点，即$\triangle ABC$ 的垂心. 由塞瓦定理有

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,$$

因为 $EG/\!/DF$，所以$\triangle MDF\backsim\triangle MGE$，

所以$\dfrac{GM}{MD}=\dfrac{EG}{DF}=\dfrac{S_{\triangle EBC}}{S_{\triangle DBC}}=\dfrac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}$，

因为 $AH/\!/EG$，所以$\dfrac{HG}{AE}=\dfrac{CH}{AC}$，

所以$\dfrac{AD}{AB}\cdot\dfrac{BH}{HG}\cdot\dfrac{GM}{MD}=\dfrac{AD}{AB}\cdot\dfrac{BH\cdot AC}{AE\cdot CH}\cdot\dfrac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}$.

因为 $AB\cdot CD=2S_{\triangle ABC}=AC\cdot BE$，

所以$\dfrac{AD}{AB}\cdot\dfrac{BH}{HG}\cdot\dfrac{GM}{MD}=\dfrac{AD}{BD}\cdot\dfrac{BH}{HC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$.

由梅涅劳斯定理的逆定理知 A、M、H 三点共线，所以 $AM\perp BC$

评注 使用梅涅劳斯定理和塞瓦定理证明本题，还可找到一些不同的方法，但限于篇幅，不再一一列举，留给读者去思考，相信读者还会找到更好的证法.

例 4 如图 1-11，点 I、H 分别为锐角$\triangle ABC$ 的内心和垂心，点 B_1、C_1 分别为边 AC、

AB 的中点.已知射线 B_1I 交边 AB 于点 $B_2(B_2\neq B)$,射线 C_1I 交 AC 的延长线于点 C_2,B_2C_2 与 BC 相交于点 K,A_1 为 $\triangle BHC$ 的外心.试证:A、I、A_1 三点共线的充要条件是 $\triangle BKB_2$ 和 $\triangle CKC_2$ 的面积相等.

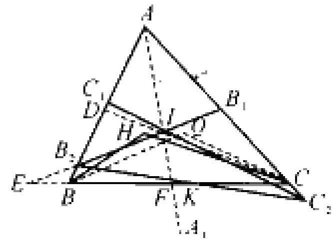


图 1-11

分析 首先证 A、I、A_1 三点共线 $\Leftrightarrow \angle BAC=60^\circ$.

设点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,连接 BO、CO,则 $\angle BOC=2\angle BAC$.又 $\angle BHC=180^\circ-\angle BAC$,因此,$\angle BAC=60^\circ$

$\Leftrightarrow B$、H、O、C 四点共圆,

$\Leftrightarrow A_1$ 在 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 上,

$\Leftrightarrow AI$ 与 AA_1 重合 $\Leftrightarrow A$、I、A_1 三点共线.

其次,再证 $S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow \angle BAC=60^\circ$.并在三角函数式中,用 A、B、C 分别表示三个内角.

证法1 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,CI 的延长线交 AB 于 D,对 $\triangle ACD$ 及截线 C_1IC_2,应用梅涅劳斯定理,有 $\dfrac{AC_1}{C_1D}\cdot\dfrac{DI}{IC}\cdot\dfrac{CC_2}{C_2A}=1$. ①

注意到 $C_1D=AD-AC_1=\dfrac{AC\cdot AB}{AC+BC}-\dfrac{AB}{2}$

$$=\frac{AB(AC-BC)}{2(AC+BC)}=\frac{\sin C(\sin B-\sin A)\cdot R}{\sin B+\sin A}=\frac{2\sin^2\dfrac{C}{2}\cdot\sin\dfrac{B-A}{2}\cdot R}{\cos\dfrac{A-B}{2}},$$

所以 $\dfrac{C_1D}{AC_1}=\dfrac{\sin\dfrac{C}{2}\cdot\sin\dfrac{B-A}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}}$,

而 $\dfrac{IC}{DI}=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{\sin\angle ADC}{\sin\angle ACD}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{C}{2}+B\right)}{\sin\dfrac{C}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}$,由①式,有

$\dfrac{CC_2}{C_2A}=\dfrac{IC}{DI}\cdot\dfrac{C_1D}{AC_1}=\dfrac{\sin\dfrac{B-A}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}$,

从而 $\dfrac{AC}{AC_2}=\dfrac{AC_2-CC_2}{C_2A}=\dfrac{2\sin\dfrac{A}{2}\cdot\cos\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}$ ②

又对$\triangle ACD$及截线B_1IB_2，应用梅涅劳斯定理，有$\frac{AB_2}{B_2D}\cdot\frac{DI}{IC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

注意到$CB_1=B_1A$，有$\frac{B_2D}{AB_2}=\frac{DI}{IC}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$，$\frac{AD}{AB_2}=\frac{AB_2-B_2D}{AB_2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$

$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$，即$AB_2=AD\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}=AB\cdot\frac{AC}{AC+BC}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}=$

$AB\cdot\frac{\sin B}{\sin B+\sin A}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}=AB\cdot\frac{\cos\frac{B}{2}}{2\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}}$.

从而 $$\frac{AB}{AB_2}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}. \quad ③$$

由$S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}\Leftrightarrow\frac{AB\cdot AC}{AB_2\cdot AC_2}=1$，注意到②、③$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{A}{2}=1$，且$A$为锐角$\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

证法2 如图1-11，设直线AI交BC于F，直线B_1B_2交CB的延长线于E. 对$\triangle ACF$及截线B_1IE应用梅涅劳斯定理，有$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CE}{EF}\cdot\frac{FI}{IA}=1$. ④

又由$AB_1=B_1C$及角平分线性质，即有$\frac{FI}{IA}=\frac{CF}{CA}=\frac{BF}{BA}=\frac{BC}{AB+AC}$.

令$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，则$\frac{FI}{IA}=\frac{a}{b+c}$.

由④式，有$\frac{CE}{EF}=\frac{b+c}{a}$，即$\frac{EF}{CF}=\frac{EF}{CE-EF}=\frac{a}{b+c-a}$.

而$CF=\frac{ab}{b+c}$，则$EF=\frac{a^2b}{(b+c-a)(b+c)}$.

又$BF=\frac{ac}{b+c}$，$BE=EF-BF=\frac{a(a-c)}{b+c-a}$（由题设知$a>c$）.

从而 $$\frac{EF}{BE}=\frac{ab}{(b+c)(a-c)}. \quad ⑤$$

对$\triangle ABF$及截线IB_2E，应用梅涅劳斯定理，有$\frac{AI}{IF}\cdot\frac{FE}{EB}\cdot\frac{BB_2}{B_2A}=1$.

将⑤式代入上式，得$\frac{BB_2}{B_2A}=\frac{IF}{AI}\cdot\frac{BE}{EF}=\frac{a-c}{b}$，所以$\frac{AB}{AB_2}=\frac{AB_2+B_2B}{AB_2}=\frac{a+b-c}{b}$. ⑥

同理 $\dfrac{AC}{AC_2}=\dfrac{a+c-b}{c}$. ⑦

由 $S_{\triangle BKB_1}=S_{\triangle CKC_1}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}\Leftrightarrow\dfrac{AB\cdot AC}{AB_2\cdot AC_2}=1$，注意到⑥、⑦$\Leftrightarrow\dfrac{a+b-c}{b}\cdot$
$\dfrac{a+c-b}{c}=1\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-bc\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

例5 如图1-12，$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB所在的直线上的点D、E、F共线，并且直线AD、BE、CF关于$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$平分线的对称直线AD'、BE'、CF'分别与BC、CA、AB所在直线交于D'、E'、F'，则D'、E'、F'三点也共线.

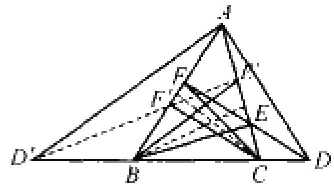


图1-12

证明 对$\angle ABC$及截线FED应用角元形式的梅涅劳斯定理，有

$$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle EBA}\cdot\frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle FCB}=1.$$

由题设知，$\angle CAD'=\angle BAD$，$\angle D'AB=\angle DAC$，$\angle BCF'=\angle ACF$，$\angle F'CA=\angle FCB$，$\angle ABE'=\angle CBE$，$\angle E'BC=\angle EBA$，从而有

$$\frac{\sin\angle CAD'}{\sin\angle D'AB}\cdot\frac{\sin\angle ABE'}{\sin\angle E'BC}\cdot\frac{\sin\angle BCF'}{\sin\angle F'CA}=1,$$即

$$\frac{\sin\angle BAD'}{\sin\angle D'AC}\cdot\frac{\sin\angle CBE'}{\sin\angle E'BA}\cdot\frac{\sin\angle ACF'}{\sin\angle F'CB}=1.$$

故由角元形式的梅涅劳斯定理，知D'、E'、F'共线.

例6 设$\triangle ABC$是等边三角形，P是其内部一点，线段AP、BP、CP依次交三边BC、CA、AB于A_1、B_1、C_1三点. 求证：$A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot C_1A_1\geqslant A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A$.

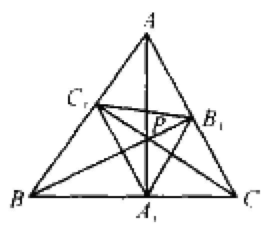


图1-13

证明 如图1-13，由余弦定理有

$$\begin{aligned}A_1B_1^2&=A_1C^2+B_1C^2-A_1C\cdot B_1C\\&\geqslant 2A_1C\cdot B_1C-A_1C\cdot B_1C\\&=A_1C\cdot B_1C.\end{aligned}$$

同理 $B_1C_1^2\geqslant B_1A\cdot C_1A$，$C_1A_1^2\geqslant C_1B\cdot A_1B$.

由塞瓦定理得

$$\frac{A_1C}{A_1B}\cdot\frac{B_1A}{B_1C}\cdot\frac{C_1B}{C_1A}=1$$

所以 $A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot C_1A_1$

$\geqslant\sqrt{A_1C\cdot B_1C\cdot B_1A\cdot C_1A\cdot C_1B\cdot A_1B}$

$=A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A\cdot\sqrt{\dfrac{A_1C\cdot B_1A\cdot C_1B}{A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A}}$

$=A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A.$

评注 从例6证明过程可看出，塞瓦定理的应用起着关键的枢纽作用，建立了余弦定理与要证结论的联系.

例7 P 为 $\triangle ABC$ 内任一点，在三角形内作射线 AL、BM、CN，使得 $\angle CAL=\angle PAB$，$\angle MBC=\angle PBA$，$\angle NCA=\angle BCP$. 求证：AL、BM、CN 三线共点.

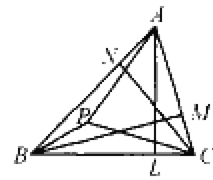


图 1-14

分析 将射线 AL、BM、CN 画到与对边相交，则恰好出现塞瓦定理的图形，且若把 AP、BP、CP 延长到与对边相交，则得到另一个塞瓦定理的标准图形. 所以此题证明宜用塞瓦定理进行.

证法1 如图1-14，记 $AL\cap BC=L$，$BM\cap CA=M$，$CN\cap AB=N$，由正弦定理有

$$\frac{BL}{LC}=\frac{AB\cdot\sin\angle BAL}{AC\cdot\sin\angle CAL}=\frac{AB\cdot\sin\angle PAC}{AC\cdot\sin\angle PAB}.$$

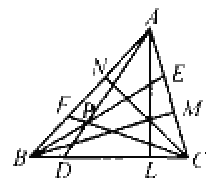


图 1-15

同理可证

$$\frac{CM}{MA}=\frac{BC\cdot\sin\angle PBA}{AB\cdot\sin\angle PBC},\frac{AN}{NB}=\frac{AC\cdot\sin\angle PCB}{BC\cdot\sin\angle PCA}.$$

将上述三式相乘，再由正弦定理即得

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{\sin\angle PAC\cdot\sin\angle PBA\cdot\sin\angle PCB}{\sin\angle PCA\cdot\sin\angle PAB\cdot\sin\angle PBC}=\frac{PC}{PA}\cdot\frac{PA}{PB}\cdot\frac{PB}{PC}=1.$$

由塞瓦定理的逆定理知 AL、BM、CN 三线共点.

证法2 如图1-15，记 $AL\cap BC=L$，$BM\cap AC=M$，$CN\cap AB=N$，$AP\cap BC=D$，$BP\cap AC=E$，$CP\cap AB=F$，由塞瓦定理有

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,\qquad ①$$

在 $\triangle ABL$ 和 $\triangle ACL$ 中应用正弦定理，有

$$\frac{BL}{LC}=\frac{BL}{AL}\cdot\frac{AL}{LC}=\frac{\sin\angle BAL}{\sin B}\cdot\frac{\sin C}{\sin\angle LAC}=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin C}{\sin B}$$

$$=\frac{\sin\angle PAC}{\sin C}\cdot\frac{\sin B}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin^2C}{\sin^2B}=\frac{DC}{AD}\cdot\frac{AD}{BD}\cdot\frac{\sin^2C}{\sin^2B}$$

$$=\frac{DC}{BD}\cdot\frac{\sin^2C}{\sin^2B}.\qquad ②$$

同理可证

$$\frac{CM}{MA}=\frac{AE}{EC}\cdot\frac{\sin^2A}{\sin^2C},\qquad ③$$

$\frac{AN}{NB}=\frac{BF}{FA}\cdot\frac{\sin^2 B}{\sin^2 A}$. ④

将②、③、④连乘并由①得

$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{DC}{BD}\cdot\frac{AE}{EC}\cdot\frac{EF}{FA}=1$.

由塞瓦定理的逆定理知 AL、BM、CN 三线共点.

评注 从例 7 证明过程可见，在使用塞瓦定理的逆定理证题的过程中，正弦定理起着重要的作用，这不是偶然的，因为二者的结论和条件都是比例式导致的必然联系，实际上，在这类证明过程中，还经常用梅涅劳斯定理、切割线定理及其他的在结论中含有比例式的定理.

例 8 如图 1-16，P 为$\triangle ABC$ 内任一点，在形内作射线 AL、BM、CN，使得 $\angle CAL=\angle PAB$，$\angle MBC=\angle PBA$，$\angle NCA=\angle BCP$. 求证：AL、BM、CN 三线共点.

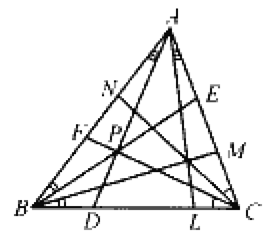


图 1-16

证法 1 设 AL 交 BC 于 L，BM 交 CA 于 M，CN 交 AB 于 N，则由正弦定理有

$\frac{BL}{LC}=\frac{AB\cdot\sin\angle BAL}{AC\cdot\sin\angle CAL}=\frac{AB\cdot\sin\angle PAC}{AC\cdot\sin\angle PAB}$.

同理，$\frac{CM}{MA}=\frac{BC\cdot\sin\angle PBA}{AB\cdot\sin\angle PBC}$，

$\frac{AN}{NB}=\frac{AC\cdot\sin\angle PCB}{BC\cdot\sin\angle PCA}$.

将上述三式相乘，并应用正弦定理，有

$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin\angle PBA}{\sin\angle PBC}\cdot\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PCA}=\frac{PC}{PA}\cdot\frac{PA}{PB}\cdot\frac{PB}{PC}=1$.

由塞瓦定理的逆定理，知 AL、BM、CN 共点.

证法 2 设 AL 交 BC 于 L，BM 交 CA 于 M，CN 交 AB 于 N，直线 AP 交 BC 于 D，直线 BP 交 AC 于 E，直线 CP 交 AB 于 F.

对$\triangle ABC$ 及点 P，应用塞瓦定理，有 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$. ①

在$\triangle ABL$ 和$\triangle ACL$ 中应用正弦定理，有

$$\frac{BL}{LC}=\frac{BL}{AL}\cdot\frac{AL}{LC}=\frac{\sin\angle BAL}{\sin\angle B}\cdot\frac{\sin\angle C}{\sin\angle LAC}=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin\angle C}{\sin\angle B}$$

$$=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle C}\cdot\frac{\sin\angle B}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin^2\angle C}{\sin^2\angle B}=\frac{DC}{AD}\cdot\frac{AD}{BD}\cdot\frac{\sin^2\angle C}{\sin^2\angle B}=\frac{DC}{BD}\cdot\frac{\sin^2\angle C}{\sin^2\angle B}.$$

同理，$\frac{CM}{MA}=\frac{AE}{EC}\cdot\frac{\sin^2\angle A}{\sin^2\angle C}$，$\frac{AN}{NB}=\frac{BF}{FA}\cdot\frac{\sin^2\angle B}{\sin^2\angle A}$.

以上三式相乘，并注意到①式，有

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{DC}{BD}\cdot\frac{AE}{EC}\cdot\frac{BF}{FA}=1.$$

由塞瓦定理的逆定理，知 AL、BM、CN 共点.

证法3 设 AL 交 BC 于 L，BM 交 AC 于 M，CN 交 AB 于 N，直线 AP 交 BC 于 D，直线 BP 交 AC 于 E，直线交 AB 于 F，对 $\triangle ABC$ 及点 P，应用角元形式的塞瓦定理，有

$$\frac{\sin\angle PAB}{\sin\angle PAC}\cdot\frac{\sin\angle PBC}{\sin\angle PBA}\cdot\frac{\sin\angle PCA}{\sin\angle PCB}=1.$$

由题设 $\angle PAB=\angle CAL$，$\angle PBA=\angle CBM$、$\angle PCB=\angle ACN$，则有 $\angle BAL=\angle PAC$，$\angle ABM=\angle PBC$，$\angle BCN=\angle PCA$.

于是 $$\frac{\sin\angle BAL}{\sin\angle CAL}\cdot\frac{\sin\angle CBM}{\sin\angle ABM}\cdot\frac{\sin\angle ACN}{\sin\angle BCN}=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin\angle PBA}{\sin\angle PBC}\cdot\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PCA}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sin\angle PAB}{\sin\angle PAC}\cdot\frac{\sin\angle PBC}{\sin\angle PBA}\cdot\frac{\sin\angle PCA}{\sin\angle PCB}}=\frac{1}{1}=1,$$

对 $\triangle ABC$，应用角元形式的塞瓦定理的逆定理，知 AL、BM、CN 三线共点.

思考交流

思考题1 如图1-17，在四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ABC$ 的面积比是 $3:4:1$，点 M、N 分别在 AC、CD 上，满足 $AM:AC=CN:CD$，并且 B、M、N 共线，求证：M 与 N 分别是 AC 和 CD 的中点.

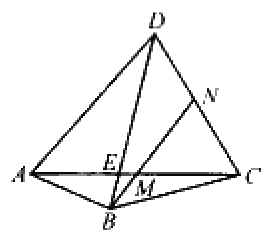


图1-17

证明 设 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}=r(0<r<1)$，$AC$ 交 BD 于 E.

因为 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BCD}:S_{\triangle ABC}=3:4:1$，

所以 $\frac{BE}{BD}=\frac{1}{7}$，$\frac{AE}{AC}=\frac{3}{7}$.

$$\frac{EM}{MC}=\frac{AM-AE}{AC-AM}=\frac{\frac{AM}{AC}-\frac{AE}{AC}}{1-\frac{AM}{AC}}=\frac{r-\frac{3}{7}}{1-r}=\frac{7r-3}{7-7r}.$$

又因为 B、M、N 三点共线，可视 BMN 为 $\triangle CDE$ 的截线，故由梅涅劳斯定理，得

$$\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DB}{BE}\cdot\frac{EM}{MC}=1，即\frac{r}{1-r}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{7r-3}{7-7r}=1.$$

化简整理，得 $6r^2-r-1=0$，

解得 $r=\frac{1}{2}, r=-\frac{1}{3}$（舍去）.

故 M 与 N 分别是 AC 和 CD 的中点.

思考题 2 如图 1-18，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分 $\angle BAD$. 在 CD 上取一点 E，BE 与 AC 相交于 F，延长 DF 交 BC 于 G. 求证：$\angle GAC=\angle EAC$.

证明 连 BD 交 AC 于 H，对 $\triangle BCD$ 及点 F，应用塞瓦定理，有

$$\frac{CG}{GB}\cdot\frac{BH}{HD}\cdot\frac{DE}{EC}=1.$$

AH 平分 $\angle BAD$，由角平分线性质，可得

$\frac{BH}{HD}=\frac{AB}{AD}$，故 $\frac{CG}{GB}\cdot\frac{AB}{AD}\cdot\frac{DE}{EC}=1$.

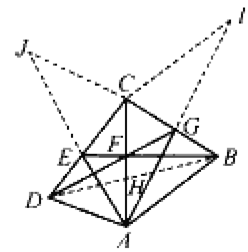


图 1-18

过点 C 作 AB 的平行线交 AG 的延长线于 I，过点 C 作 AD 的平行线交 AE 的延长线于 J，则

$\frac{CG}{GB}=\frac{CI}{AB}$，$\frac{DE}{EC}=\frac{AD}{CJ}$. 所以 $\frac{CI}{AB}\cdot\frac{AB}{AD}\cdot\frac{AD}{CJ}=1$.

从而，$CI=CJ$.

又 $CI\,/\!/\,AB$，$CJ\,/\!/\,AD$，有 $\angle ACI=180^\circ-\angle BAC=180^\circ-\angle DAC=\angle ACJ$.

因此，$\triangle ACI\cong\triangle ACJ$，即有 $\angle IAC=\angle JAC$.

故 $\angle GAC=\angle EAC$.

思考题 3 如图 1-19，在一个 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=2\angle B$，P 为 $\triangle ABC$ 内满足 $AP=AC$ 及 $PB=PC$ 的一点. 求证：AP 是 $\angle A$ 的三等分线.

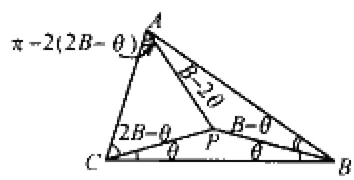


图 1-19

证明 用 B 表示 $\angle ABC$ 的度量，令 $\angle PCB=\theta$，则 $\angle PBC=\theta$，$\angle ABP=B-\theta$，$\angle ACP=2B-\theta$，$\angle CAP=\pi-2(2B-\theta)$（其中注意 $AP=AC$），$\angle PAB=\angle A-\angle CAP=(\pi-B-C)-[\pi-2(2B-\theta)]=(\pi-3B)-(\pi-4B+2\theta)=B-2\theta$.

对 $\triangle ABC$ 及点 P，应用角元形式的塞瓦定理，有

$$\frac{\sin[\pi-2(2B-\theta)]}{\sin(B-2\theta)}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin(2B-\theta)}\cdot\frac{\sin(B-\theta)}{\sin\theta}=1.$$

即 $$\frac{2\sin(2B-\theta)\cdot\cos(2B-\theta)\cdot\sin(B-\theta)}{\sin(B-2\theta)\cdot\sin(2B-\theta)}=1.$$

所以 $\sin(B-2\theta)=2\sin(B-\theta)\cdot\cos(2B-\theta)=\sin(3B-2\theta)-\sin B$，

所以 $\sin B=\sin(3B-2\theta)-\sin(B-2\theta)=2\cos(2B-2\theta)\cdot\sin B$.

而 $\sin B \neq 0$，则 $\cos 2(B-\theta)=\frac{1}{2}$.

因 $0<B-\theta<B<\frac{1}{3}(B+C)<\frac{\pi}{3}$，则 $2(B-\theta)\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$.

所以 $2(B-\theta)=\frac{\pi}{3}$，即 $B-\theta=\frac{\pi}{6}$.

从而
$$\begin{aligned}\angle CAP&=\pi-2(2B-\theta)=\pi-4(B-\theta)-2\theta\\&=\frac{\pi}{3}-2\theta=2\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=2[(B-\theta)-\theta]\\&=2(B-2\theta)=2\angle PAB.\end{aligned}$$

故 $\angle PAB=\frac{1}{3}\angle A$，即 AP 是 $\angle A$ 的三等分线.

同步检测

1. 如图 1-20，在 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别是 BC、CA 上的点，且 $BD:DC=m:1$，$CE:EA=n:1$，AD 与 BE 交于 F，问：$\triangle ABF$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的多少倍？

2. 如图 1-21，BE 是 $\triangle ABC$ 的中线，G 在 BE 上，分别延长 AG、CG 交 BC、AB 于 D、F，过 D 作 $DN /\!/ CG$ 交 BG 于 N，$\triangle DGL$ 及 $\triangle FGM$ 为正三角形. 求证：$\triangle LMN$ 为正三角形.

3. 如图 1-22，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，G 为 AB 上给定的一点（G 不是线段 AB 的中点）. 设 D 为直线 GC 上与 C、G 都不相同的任意一点，并且直线 AD、BC 交于 E，直线 BD、AC 交于 F，直线 EF、AB 交于 H. 试证明交点 H 与 D 在直线 CG 上的位置无关.

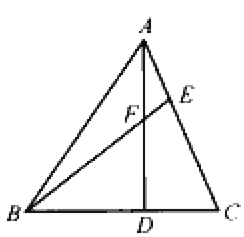


图 1-20

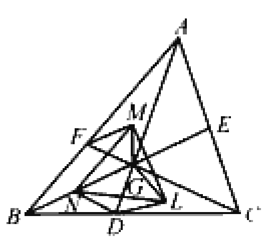


图 1-21

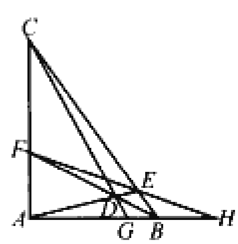


图 1-22

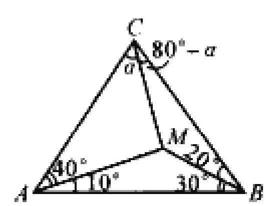


图 1-23

4. 如图 1-23，在 $\triangle ABC$ 内取一点 M，使得 $\angle MBA=30°$，$\angle MAB=10°$. 设 $\angle ACB=80°$，$AC=BC$，求 $\angle AMC$.

5. 如图 1-24，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分 $\angle BAD$，在 CD 上取一点 E，BE

与 AC 相交于 F，延长 DF 交 BC 于 G. 求证：$\angle GAC=\angle EAC$.

6. 如图 1-25，四边形 $ABCD$ 的内切圆分别切 AB、BC、CD，DA 于点 E、F、G、H. 求证：HE、DB、GF 三线共点.

7. 如图 1-26，设 M 为△ABC 内任一点，AM、BM、CM 分别交 BC、CA、AB 于 D、E、F. 求证：$\frac{MD}{AD}+\frac{ME}{BE}+\frac{MF}{CF}=1$.

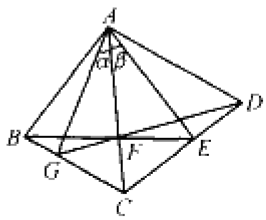


图 1-24

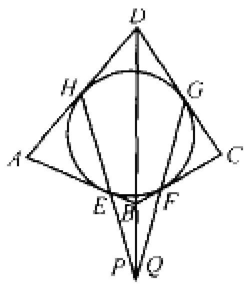


图 1-25

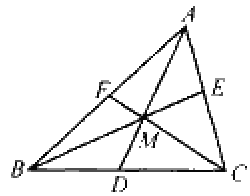


图 1-26

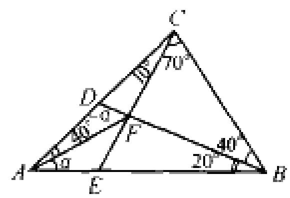


图 1-27

8. 如图 1-27，在△ABC 中，$\angle BAC=40^\circ$、$\angle ABC=60^\circ$，D 和 E 分别是 AC 和 AB 上的点，使得$\angle CBD=40^\circ$、$\angle BCE=70^\circ$，F 是直线 BD 和 CE 的交点. 证明：直线 AF 和直线 BC 垂直.

9. O 为△ABC 所在平面上任一点，AO、BO、CO 分别交边 BC、CA、AB 于点 D、E、F；作 $EG/\!/AD/\!/FH$. 点 G、H 均在直线 BC 上，则 EH 与 FG 的交点 P 在直线 AD 上.

10. 如图 1-28，四边形 $ABCD$ 内接于圆，边 AB 和 DC 的延长线交于点 P，边 AD 和 BC 的延长线交于点 Q，AC 和 BD 交于点 R，过 Q 作圆的两条切线，切点分别为 E、F，则 P、F、R、E 四点共线.

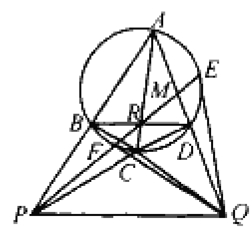


图 1-28

第2讲 平面几何中三个相互等价的定理

知识点金

托勒密定理 圆内接四边形的两组对边乘积之和等于两对角线的乘积.

证明 如图1-29,四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,在 BD 上取一点 P,使 $\angle PAB=\angle CAD$,则 $\triangle ABP\backsim\triangle ACD$,于是

$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BP}{CD}\Rightarrow AB\cdot CD=AC\cdot BP.$

又 $\triangle ABC\backsim\triangle APD$,则有 $BC\cdot AD=AC\cdot PD$.

上述两乘积式相加,得

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC(BP+PD)=AC\cdot BD. \quad ①$$

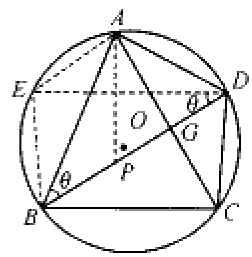


图 1-29

评注 此定理有多种证法,例如:作 $AE/\!/BD$ 交 $\odot O$ 于 E,连 EB、ED,则知 $BDAE$ 为等腰梯形,则有 $EB=AD$,$ED=AB$,$\angle ABD=\angle BDE=\theta$,且 $\angle EBC+\angle EDC=180^\circ$,令 $\angle BAC=\varphi$,AC 与 BD 交于 G,则

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle AGD=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin(\theta+\varphi)$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle EDC,$$

$$S_{EBCD}=S_{\triangle EBC}+S_{\triangle ECD}=\frac{1}{2}EB\cdot BC\cdot\sin\angle EBC+\frac{1}{2}ED\cdot DC\cdot\sin\angle EDC$$

$$=\frac{1}{2}(EB\cdot BC+ED\cdot DC)\cdot\sin\angle EDC$$

$$=\frac{1}{2}(AD\cdot BC+AB\cdot DC)\cdot\sin\angle EDC.$$

易知 $S_{ABCD}=S_{EBCD}$,从而有 $AB\cdot DC+BC\cdot AD=AC\cdot BD$.

推论1(三弦定理) 如果 A 是圆上任意一点,AB、AC、AD 是该圆上顺次的三条弦,则

$$AC\cdot\sin\angle BAD=AB\cdot\sin\angle CAD+AD\cdot\sin\angle CAB. \quad ②$$

事实上，由①式应用正弦定理将 BD、DC、BC 换掉即得②式.

推论2（四角定理） 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，则 $\sin\angle ADC\cdot\sin\angle BAD=\sin\angle ABD\cdot\sin\angle BDC+\sin\angle ADB\cdot\sin\angle DBC$. ③

事实上，由①式应用正弦定理将六条线段都换掉即得③式.

直线上的托勒密定理 若 A、B、C、D 为一直线上依次排列的四点，则 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$.

四边形中的托勒密定理 设 $ABCD$ 为任意凸四边形，则 $AB\cdot CD+BC\cdot AD\geqslant AC\cdot BD$，当且仅当 A、B、C、D 四点共圆时取等号.

证明 如图1-30，取点 E 使 $\angle BAE=\angle CAD$，$\angle ABE=\angle ACD$，则 $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$，即有 $\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{AC}{AB}$，且 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{BE}$，即

$$AB\cdot CD=AC\cdot BE. \quad ①$$

又 $\angle DAE=\angle CAB$，则有 $\triangle ADE\backsim\triangle ACB$，亦有

$$AD\cdot BC=AC\cdot ED. \quad ②$$

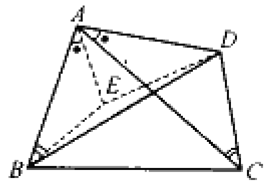


图 1-30

由①式与②式，注意到 $BE+ED\geqslant BD$，有

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot(BE+ED)\geqslant AC\cdot BD.$$

其中等号当且仅当 E 在 BD 上，即 $\angle ABD=\angle ACD$ 时成立. 此时 A、B、C、D 四点共圆. 由此，即有

托勒密定理的逆定理 在凸四边形 $ABCD$ 中，若 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$，则 A、B、C、D 四点共圆.

西姆松定理 过三角形外接圆上异于三角形顶点的任意一点作三边的垂线，则三垂足点共线（此线常称为西姆松线）.

证明 如图1-31，设 P 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上任一点，从 P 向三边 BC、CA、AB 所在直线作垂线，垂足分别为 L、M、N. 连 PA、PC，由 P、N、A、M 四点共圆，有 $\angle PMN=\angle PAN=\angle PAB=\angle PCB=\angle PCL$.

又 P、M、C、L 四点共圆，有 $\angle PML=\angle PCL$.

故 $\angle PMN=\angle PML$，即 L、N、M 三点共线.

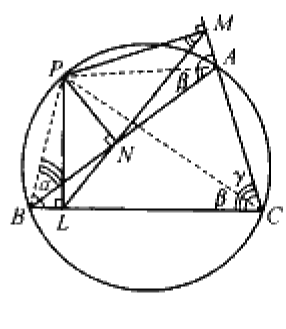


图 1-31

注 此定理有许多证法，例如下面证法：

如图所示，连 PB，令 $\angle PBC=\alpha$，$\angle PCB=\beta$，$\angle PCM=\gamma$，则 $\angle PAM=\alpha$，$\angle PAN=\beta$，$\angle PBN=\gamma$，且 $BL=PB\cdot\cos\alpha$，$LC=PC\cdot\cos\beta$，$CM=PC\cdot\cos\gamma$，$MA=PA\cdot\cos\alpha$，$AN=PA\cdot\cos\beta$，$NB=PB\cdot\cos\gamma$. 对 $\triangle ABC$，有 $\dfrac{BL}{LC}\cdot\dfrac{CM}{MA}\cdot\dfrac{AN}{NB}=\dfrac{PB\cdot\cos\alpha}{PC\cdot\cos\beta}\cdot\dfrac{PC\cdot\cos\gamma}{PA\cdot\cos\alpha}\cdot\dfrac{PA\cdot\cos\beta}{PB\cdot\cos\gamma}=1$. 故由梅涅劳斯定理之逆定

理，知 L、N、M 三点共线.

西姆松定理还可运用托勒密定理、张角定理、斯特瓦尔特定理来证（略）.

西姆松定理的逆定理 若一点在三角形三边所在直线上的射影共线，则该点在此三角形的外接圆上.

证明 如图 1-31，设点 P 在$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 所在直线上的射影分别为 L、M、N，且此三点共线. 由 $PN\perp AB$ 于 N，$PM\perp AC$ 于 M，$PL\perp BC$ 于 L，知 P、B、L、N 及 P、N、A、M 分别四点共圆，而 AB 与 LM 相交于 N，则$\angle PBC=\angle PBL=\angle PNM=\angle PAM$，从而 P、B、C、A 四点共圆，即点 P 在$\triangle ABC$ 的外接圆上.

斯特瓦尔特定理 设 P 为$\triangle ABC$ 的 BC 边上任一点（$P\neq B$，$P\neq C$），则有

$$AB^2\cdot PC+AC^2\cdot BP=AP^2\cdot BC+BP\cdot PC\cdot BC \quad ①$$

或 $$AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}-BC^2\cdot\frac{BP}{BC}\cdot\frac{PC}{BC}. \quad ②$$

证明 如图 1-32，为不失一般性，不妨设$\angle APC<90°$，则由余弦定理，有

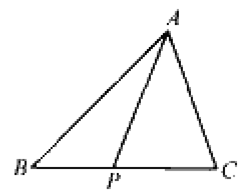


图 1-32

$$AC^2=AP^2+PC^2-2AP\cdot PC\cdot\cos\angle APC,$$

$$\begin{aligned}AB^2&=AP^2+PB^2-2AP\cdot BP\cdot\cos(180°-\angle APC)\\&=AP^2+BP^2+2AP\cdot BP\cdot\cos\angle APC.\end{aligned}$$

对上述两式分别乘以 BP、PC 后相加整理，得①式或②式.

斯特瓦尔特定理的逆定理 设 B、P、C 依次分别为从 A 点引出的三条射线 AB、AP、AC 上的点，若

$$AB^2\cdot PC+AC^2\cdot BP=AP^2\cdot BC+BP\cdot PC\cdot BC,$$

或 $$AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}-BC^2\cdot\frac{BP}{BC}\cdot\frac{PC}{BC},$$

则 B、P、C 三点共线.

证明 令$\angle BPA=\theta_1$，$\angle APC=\theta_2$，对$\triangle ABP$ 和$\triangle APC$ 分别应用余弦定理，有

$AB^2=AP^2+PB^2-2AP\cdot PB\cdot\cos\theta_1$，$AC^2=AP^2+PC^2-2AP\cdot PC\cdot\cos\theta_2$.

将上述两式分别乘以 PC、BP 后相加，再与已知条件式相比较得

$-2AP\cdot BP\cdot PC\cdot(\cos\theta_1+\cos\theta_2)=0$，由此推出 $\theta_1=180°-\theta_2$，即证.

斯特瓦尔特定理的推广 (a)设 P 为$\triangle ABC$ 的 BC 边延长线上任一点，则

$$AP^2=-AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}+BC^2\cdot\frac{PC}{BC}\cdot\frac{BP}{BC}. \quad ③$$

(b)设 P 为$\triangle ABC$ 的 BC 边反向延长线上任一点，则

$$AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}-AC^2\cdot\frac{BP}{BC}-BC^2\cdot\frac{PC}{BC}\cdot\frac{BP}{BC}. \quad ④$$

注 若用有向线段表示，则②、③、④式是一致的.

推论 1 设 P 为等腰$\triangle ABC$ 的底边 BC 上任一点，则 $AP^2=AB^2-BP\cdot PC$.

推论 2 设 AP 为$\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线，则 $AP^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2$.

推论 3 设 AP 为$\triangle ABC$ 的$\angle A$ 的内角平分线，则 $AP^2=AB\cdot AC-BP\cdot PC$.

推论 4 设 AP 为$\triangle ABC$ 的$\angle A$ 的外角平分线，则 $AP^2=-AB\cdot AC+BP\cdot PC$.

推论 5 在$\triangle ABC$ 中，若 P 分线段 BC 满足$\frac{BP}{BC}=\lambda$，则

$AP^2=\lambda(\lambda-1)BC^2+(1-\lambda)AB^2+\lambda\cdot AC^2$.

注 若$\frac{BP}{PC}=k$，则 $AP^2=\frac{1}{1+k}\cdot AB^2+\frac{k}{1+k}AC^2-\frac{k}{(1+k)^2}\cdot BC^2$.

西姆松定理和托勒密定理，在一般人看来是两个独立的定理，实则两个定理是等价的，下面将证明这两个定理的等价性.

西姆松定理：三角形外接圆上任一点在三边所在直线上的射影共线.

托勒密定理：若四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，则 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.

证明 (1)用西姆松定理证明托勒密定理.

$ABCD$ 是任一圆内接四边形，连接 AC，如图 1-33，过 D 向$\triangle ABC$ 各边作垂线，垂足分别为 C_1、A_1、B_1，连接 C_1B_1、B_1A_1，由西姆松定理得

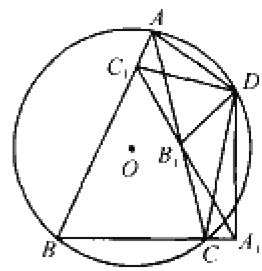


图 1-33

$$C_1B_1+B_1A_1=C_1A_1 \quad ①$$

由 A、C_1、B_1、D 四点共圆，且 AD 是该圆的直径及正弦定理，有

$C_1B_1=AD\cdot\sin\angle C_1DB_1=AD\cdot\sin\angle C_1AB_1$

$\sin\angle BAC=\frac{BC}{2R}$($R$ 为圆 O 的半径)

所以 $C_1B_1=\frac{AD\cdot BC}{2R}$

同理 $B_1A_1=\frac{CD\cdot AB}{2R}$，$C_1A_1=\frac{AC\cdot BD}{2R}$

将以上三式代入上面①式得

$AD\cdot BC+AB\cdot CD=AC\cdot BD$

(2)用托勒密定理证明西姆松定理.

由四边形 $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形，根据托勒密定理可得

$AD\cdot BC+AB\cdot CD=BD\cdot AC$

因为 $DC_1 \perp AB$，$DB_1 \perp AC$

所以 A、C_1、B_1、D 四点共圆，且 AD 是该圆的直径，由正弦定理得：

$$\frac{C_1B_1}{\sin\angle C_1DB_1}=\frac{C_1B_1}{\sin\angle C_1AB_1}=AD$$

所以 $C_1B_1=AD\cdot\sin\angle C_1AB_1$

而 $\sin\angle C_1AB_1=\dfrac{BC}{2R}$（$R$ 为圆 O 的半径）

则 $AD\cdot BC=2R\cdot C_1B_1$

同理 $AB\cdot CD=2R\cdot A_1B_1$，$AC\cdot BD=2R\cdot A_1C_1$

把以上三式代入②得

$2R\cdot C_1B_1+2R\cdot A_1B_1=2R\cdot A_1C_1$

即 $C_1B_1+A_1B_1=A_1C_1$

所以 A_1、B_1、C_1 三点在一条直线上.

斯特瓦尔特定理可推导出托勒密定理.

证明 如图 1-34，在 $\triangle ABC$ 中，点 P 在 BC 上，由斯特瓦尔特定理，有

$AP^2\cdot BC=AB^2\cdot PC+AC^2\cdot BP-BP\cdot PC\cdot BC$.

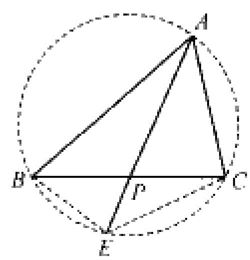


图 1-34

延长 AP 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 E，连 BE、EC，由 $\triangle ABP\backsim\triangle CEP$ 和 $\triangle ACP\backsim\triangle BEP$，有 $AB\cdot CP=CE\cdot AP$，$AC\cdot BP=AP\cdot BE$.

又由相交弦定理，有 $BP\cdot PC=AP\cdot PE$

于是，得 $AP^2\cdot BC=AB\cdot CE\cdot AP+AC\cdot AP\cdot BE-AP\cdot PE\cdot BC$，

即 $BC(AP+PE)=AB\cdot CE+AC\cdot BE$，

亦即 $AB\cdot CE+AC\cdot BE=BC\cdot AE$. 即为托勒密定理.

由托勒密定理也可推导斯特瓦尔特定理.

证明 如图 1-35，设圆内接四边形 $ABEC$ 的对角线 AE、BC 交于 P. 由托勒密定理，有

$AB\cdot EC+AC\cdot BE=BC\cdot AE$.

即 $AB\cdot EC+AC\cdot BE=(BP+PC)\cdot AE$.

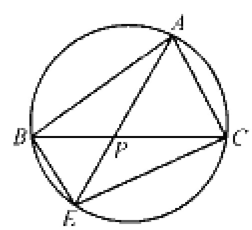


图 1-35

由 $\triangle ABP\backsim\triangle CEP$ 和 $\triangle ACP\backsim\triangle BEP$，有 $EC=\dfrac{AB\cdot PC}{AP}$，$BE=\dfrac{AC\cdot BP}{AP}$. 由相交弦定理，有 $PE=\dfrac{BP\cdot PC}{AP}$，将这些式子代入前述

式子即得斯特瓦尔特定理.

因此,在应用中,两个定理的应用范围相同,所显示的功能也一样,即凡能用托勒密定理处理的问题也能用斯特瓦尔特定理处理.反之亦然.

例题精析

例1 如图1-36,在$\triangle ABC$中,$\angle A=60^\circ$,$AB>AC$,点O是外心,两条高BE、CF交于H点,点M、N分别在线段BH、HF上,且满足$BM=CN$.求$\frac{MH+NH}{OH}$的值.

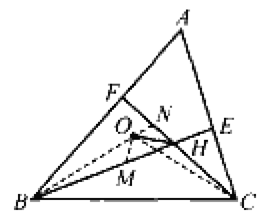


图1-36

解法1 连OB、OC,由三角形外心及垂心性质,知$\angle BOC=2\angle A=120^\circ$,$\angle BHC=180^\circ-\angle HBC-\angle HCB=180^\circ-(90^\circ-\angle C)-(90^\circ-\angle B)=180^\circ-\angle A=120^\circ$,即$B$、$C$、$H$、$O$四点共圆.在此圆中对四边形$BCHO$应用托勒密定理,有

$BO\cdot CH+OH\cdot BC=BH\cdot OC$.

设$\triangle ABC$的外接圆半径为R,则$BO=OC=R$,且由$\angle A=60^\circ$,知$BC=\sqrt{3}R$,即有$R\cdot CH+OH\cdot\sqrt{3}R=BH\cdot R$,亦即$BH-CH=\sqrt{3}OH$.

而$MH+NH=(BH-BM)+(CN-CH)=BH-CH$,

故$\frac{MH+NH}{OH}=\sqrt{3}$为所求.

解法2 同解法1,知B、C、H、O四点共圆,有$\angle OBH=\angle OCH$,而$BO=OC$,$BM=CN$,则$\triangle OBM\cong\triangle OCN$,从而$OM=ON$,$\angle BMO=\angle CNO$,由此知$O$、$M$、$H$、$N$四点共圆,且等腰$\triangle OMN$的顶角$\angle MON=\angle NHE=120^\circ$,即知$\frac{MN}{OM}=\frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}=\sqrt{3}$.

对四边形$OMHN$,应用托勒密定理,有$MH\cdot ON+NH\cdot OM=OH\cdot MN$,故$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{MN}{OM}=\sqrt{3}$为所求.

解法3 延长BE交$\odot O$于L,由三角形垂心性质,知L为H关于AC的对称点,则$LC=CH$.

设$\odot O$的半径为R,$OH=d$,$CH=x$,$BH=y$,由$\angle CLB=\angle A=60^\circ$,知$LH=LC=CH=x$.延长$OH$两端交$\odot O$于$T$、$S$,如图1-37,由相交弦定理有$TH\cdot HS=BH\cdot HL$,即$(R+d)(R-d)=x\cdot y$,即$R^2=d^2+xy$.

在$\triangle BCL$及边BL上的点H,应用斯特瓦尔特定理,并注意到$BC=2R\cdot\sin\angle A=$

$\sqrt{3}R$，可得

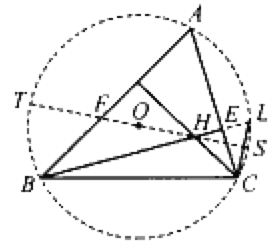


图 1-37

$$BC^2 \cdot LH + LC^2 \cdot BH = LH \cdot BH \cdot BL + CH^2 \cdot BL,$$

即 $(\sqrt{3}R)^2 \cdot x + x^2 \cdot y = x \cdot y \cdot (x+y) + x^2 \cdot (x+y)$，

亦即 $R^2 = \frac{1}{3}(x^2+xy+y^2)$.

于是，有 $\frac{1}{3}(x^2+xy+y^2) = d^2 + xy$.

亦即 $\frac{(x-y)^2}{d^2} = 3$，即 $\frac{|x-y|}{d} = \sqrt{3}$.

而当 $AB>AC$ 时，$MH+NH=BH-BM+CN-CH=BH-CH=y-x=|x-y|$，

故 $\frac{MH+NH}{OH} = \frac{|x-y|}{d} = \sqrt{3}$为所求.

例 2 经过$\angle XOY$的平分线上的一点 A，任作一直线与 OX 及 OY 分别相交于 P、Q. 求证：$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}$为定值.

证明 如图 1-38，过 O、P、Q 三点作圆，交射线 OA 于 B. 设 $\angle POA=\angle QOA=\alpha$，对四边形 $OPBQ$ 中的三条弦 OP、OB、OQ 应用托勒密定理的推论 1，有

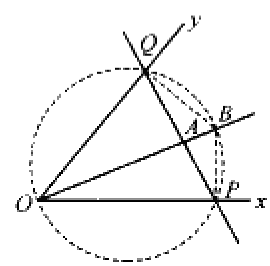


图 1-38

$$BO \cdot \sin 2\alpha = OP \cdot \sin\alpha + OQ \cdot \sin\alpha.$$

即 $$OP+OQ = \frac{BO \cdot \sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2BO \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = 2BO \cdot \cos\alpha. \quad ①$$

连 BQ，由$\triangle OPA \backsim \triangle OBQ$，有 $OP \cdot OQ = OA \cdot OB$.

由①式除以上式，得$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ} = \frac{2\cos\alpha}{OA}$（定值）.

评注 类似于比例，应用托勒密定理的推论 1，也可求解如下问题：过平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A 作一圆分别与 AB、AC、AD 相交于 E、F、G，则有 $AE \cdot AB + AG \cdot AD = AF \cdot AC$.

事实上，若设$\angle BAC=\alpha$，$\angle CAD=\beta$，则有 $AE \cdot \sin\beta + AG \cdot \sin\alpha = AF \cdot \sin(\alpha+\beta)$. 对此式两边同乘 $AB \cdot AC \cdot AD$，利用三角形的面积公式有 $AE \cdot AB \cdot S_{\triangle ADC} + AG \cdot AD \cdot S_{\triangle ABC} = AF \cdot AC \cdot S_{\triangle ABD}$.

而在$\square ABCD$ 中，有 $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD}$，由此即证.

例 3 若有四个圆都与第五个圆内切，第一个圆与第二个圆的外公切线的长用 l_{12} 表示，其他前四个圆两两的外公切线也用同样的方法来标记，且前四个圆以顺时针的顺序排列，试证明依次以 l_{12}、l_{23}、l_{34}、l_{41} 为边长，以 l_{13}、l_{24} 为对角线所构成的凸四边形的四个顶

点共圆.

证明 如图1-39,设前四个圆分别为$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot O_4$,第五个圆为$\odot O$,前四个圆与$\odot O$分别内切于A、B、C、D,则易知A、O_1、O三点共线.类似地,有B、O_2、O,C、O_3、O,D、O_4、O三点共线.

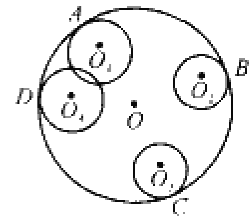


图1-39

设五个圆的半径分别为r_1、r_2、r_3、r_4、R,$\angle AOB=\alpha$、$\angle BOC=\beta$、$\angle COD=\gamma$、$\angle DOA=\delta$,$OO_1=a$、$OO_2=b$、$OO_3=c$、$OO_4=d$,则$a=R-r_1$,$b=R-r_2$,$c=R-r_3$,$d=R-r_4$.

从而,$l_{12}^2=O_1O_2^2-(r_1-r_2)^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha-(a-b)^2$

$=4ab\cdot\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.故$l_{12}=2\sqrt{ab}\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

同理,可求得l_{23},l_{34},l_{41},l_{13},l_{24}.

要证明以l_{12}、l_{23}、l_{34}、l_{41}为边长,以l_{13}、l_{24}为对角线所构成的凸四边形的四个顶点共圆,只需证明$l_{12}\cdot l_{34}+l_{23}\cdot l_{41}=l_{13}\cdot l_{24}$,化简后只要证明$\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}+\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\delta}{2}=\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}$,①即$\sin\angle ADB\cdot\sin\angle DBC+\sin\angle BDC\cdot\sin\angle ABD=\sin\angle ADC\cdot\sin\angle BAD$.这由托勒密定理的推论2即证.

评注 对于①也可由正弦定理$AB=2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$转换成$AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BD$即证.此例是一个富有应用价值的问题.托勒密定理是这个问题中四个圆均变为点(过该点线成了"点圆"的切线)的情形.

例4 如图1-40,自$\odot O$外一点引圆的两条切线PE、PF,E、F为切点,过P点任意引圆的割线交$\odot O$于A、B,交EF于C.求证:$\dfrac{2}{PC}=\dfrac{1}{PA}+\dfrac{1}{PB}$.

证明 由相交弦定理,有$EC\cdot CF=AC\cdot CB$.

由于$PE=PF$,对等腰$\triangle PEF$及底边EF上的点C,应用斯特瓦尔特定理的推论1,有$PC^2=PE^2-EC\cdot CF$,即有

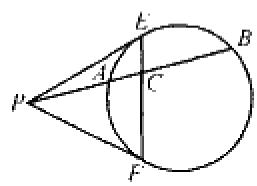


图1-40

$$\begin{aligned}PE^2&=PC^2+EC\cdot CF=PC^2+AC\cdot CB\\&=PC^2+(PC-PA)\cdot(PB-PC)\\&=PC^2-PC^2-PA\cdot PB+PC\cdot PB+PC\cdot PA\\&=PA\cdot PC+PB\cdot PC-PA\cdot PB,\end{aligned}$$

而$PE^2=PA\cdot PB$,从而$2PA\cdot PB=PA\cdot PC+PB\cdot PC$.

故 $\dfrac{2}{PC}=\dfrac{1}{PA}+\dfrac{1}{PB}$.

例5 已知$\triangle ABC$的外接圆k的圆心为O,半径为R,内切圆的圆心为I,半径为r.

另一个圆 k_0 与边 CA、CB 分别切于点 D、E，且与圆 k 内切. 求证内心 I 是线段 DE 的中点.

证明 如图 1-41，设圆 k_0 的圆心为 O_1，半径为 ρ

于是 $CI=\dfrac{r}{\sin\dfrac{C}{2}}$，$CO_1=\dfrac{\rho}{\sin\dfrac{C}{2}}$，$IO_1=\dfrac{\rho-r}{\sin\dfrac{C}{2}}$，

因而有 $\dfrac{IO_1}{CO_1}=\dfrac{\rho-r}{\rho}=1-\dfrac{r}{\rho}$. ①

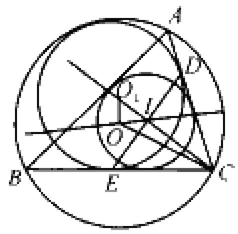


图 1-41

对于$\triangle COO_1$ 和塞瓦线 OI，应用斯德瓦特定理，有

$OO_1^2\cdot CI+OC^2\cdot IO_1=OI^2\cdot CO_1+CI\cdot CO_1\cdot IO_1$，

将 $OO_1=R-\rho$，$OI^2=R(R-2r)$，$OC=R$ 代入上式，得到

$$\sin^2\frac{C}{2}=\frac{\rho-r}{\rho}=1-\frac{r}{\rho}, \qquad ②$$

由①和②得到

$$\frac{IO_1}{CO_1}=\sin^2\frac{C}{2}=\left(\frac{\rho}{CO_1}\right)^2,$$

$$IO_1\cdot CO_1=\rho^2=O_1E^2. \qquad ③$$

因为 $O_1E\perp CE$，$CO_1\perp DE$ 且平分 DE，记 DE 中点为 I'，由射影定理有

$$I'O_1\cdot CO_1=O_1E^2, \qquad ④$$

比较③和④即知 I 与 I' 重合.

即 I 为 DE 中点.

例 6 C_1、C_2 是同心圆，C_2 的半径是 C_1 的 2 倍. 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于圆 C_1，A_4A_1 延长线交圆 C_2 于 B_1；A_1A_2 延长丝交圆 C_2 于 B_2；A_2A_3 延长线交圆 C_2 于 B_3；A_3A_4 延长线交圆 C_2 于 B_4. 试证：四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的周长$\geqslant$2 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的周长.

证明 对 O、A_4、B_4、B_1 用托勒密不等式得

$B_4B_1\cdot OA_4+A_4B_4\cdot OB_1\geqslant A_4B_1\cdot OB_4$

$B_4B_1+2A_4B_4\geqslant 2A_4B_1$.（这里用到 C_2 的半径是 C_1 的 2 倍）

于是 $B_4B_1+2A_4B_4\geqslant 2(A_4A_1+A_1B_1)$.

同理 $B_1B_2+2A_1B_1\geqslant 2(A_1A_2+A_2B_2)$，

$B_2B_3+2A_2B_2\geqslant 2(A_2A_3+A_3B_3)$，

$B_3B_4+2A_3B_3\geqslant 2(A_3A_4+A_4B_4)$.

将以上四式相加，即得四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的周长$\geqslant$2 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的周长. 证毕.

评注 托勒密定理总是给人一种轻灵的感觉，从一个很不起眼的四边形入手就能得到极为有用的结论. 但是真正的感觉还需要各位细细去寻找.

例 7 设 $ABCDEF$ 是凸六边形，且 $AB=BC$、$CD=DE$、$EF=FA$. 证明：$\frac{BC}{EB}-\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geqslant\frac{3}{2}$，并指出等号成立条件.

证明 如图 1-42 所示，记 $AC=a$, $CE=b$, $AE=c$. 对四边形 $ACEF$ 运用托勒密不等式，得

$AC\cdot EF+CE\cdot AF\geqslant AE\cdot CF$.

因为 $EF=AF$，即 $\frac{FA}{FC}\geqslant\frac{c}{a+b}$，

同样地，有

$\frac{DE}{DA}\geqslant\frac{b}{c+a}$，$\frac{BC}{BE}\geqslant\frac{a}{b+c}$.

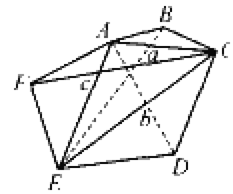


图 1-42

$$\text{所以}\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{EA}{FC}\geqslant\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}. \qquad ①$$

要等式成立，必须①是一个等式，即每次应用托勒密不等式时也要等式成立. 从而 $ACEF$、$ABCE$、$ACDE$ 都是圆内接四边形，所以 $ABCDEF$ 是圆内接六边形，且 $a=b=c$ 时，①式是等式.

因此，当且仅当六边形是正六边形时，等式成立.

评注 不等式①是熟知的，如果不知道，也没有什么. 例如：在代入 $x=a+b$, $y=c+a$, $z=b+c$ 后不等式具有形式：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}+\frac{y+z-x}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}-\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-3\right)\geqslant\frac{3}{2}$$

这是显然的.

例 8 如图 1-43，P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上 $\overparen{BC}$ 上一点，过 P 作 $PD\perp BC$ 于 D，作 $PF\perp$ 直线 AB 于 F，设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 延长 PD 到 P'，使 $PD=P'D$. 求证：$HP'\parallel DF$.

证明 连 AH 并延长交 BC 于 A'，交圆于 H'，则由 $\angle HCB=\angle BAH'=\angle BCH'$，知 $HA'=A'H'$.

又由已知 $PP'\perp BC$，且 $P'D=DP$，连 PH'，则知 PH' 与 $P'H$ 关于 BC 对称，从而 $\angle PH'H=\angle P'HH'$.

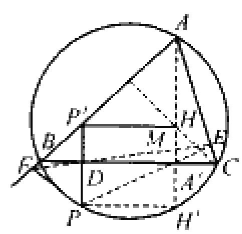


图 1-43

由于从 P 点已向 $\triangle ABC$ 的两边所在直线 AB、BC 引了垂线 PF、PD，再过点 P 向边 AC 所在直线作垂线 PE，垂足为 E，则由西姆松定理，知 F、D、E 三点共线，设西姆松线 EF 与 HA' 交于 M. 此时，又由 P、C、E、D 四点共圆，有 $\angle CPE=\angle CDE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PCE$ 中，$\angle CPE$ 与 $\angle PCE$ 互余；在 $\mathrm{Rt}\triangle MDA'$ 中，$\angle A'DM=\angle CDE$ 与 $\angle DMA'$ 互余. 故 $\angle DMA'=\angle PCE=\angle PCA=\angle PH'H=\angle P'HH'$，由此即知 $HP'\parallel$

EF、故 $HP' /\!/ DF$.

例 9 如图 1-44，P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上的一点，过点 P 分别作 $PL \perp BC$ 于 L，作 $PN \perp$ 直线 AB 于 N，直线 LN 交 BC 边上的高线于 K，设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 求证：$PK /\!/ LH$.

证明 由于从 P 点引了 $\triangle ABC$ 的边 BC、BA 所在直线的垂线，再过 P 点作 $PM \perp AC$ 于 M，则由西姆松定理，知 L、M、N 三点共直线，即 L、M、N、K 四点共线.

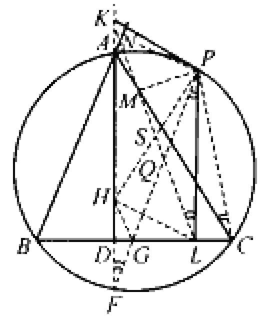


图 1-44

设 BC 边上的高线为 AD，延长 AD 交圆于 F，连 PF 交 BC 于 G，交西姆松线 NL 于 Q，连 PH 交西姆松线 NL 于 S.

由 P、C、L、M 四点共圆及 A、F、C、P 共圆，连 PC，则 $\angle MLP = \angle MCP = \angle AFP = \angle LPF$，从而 $QP = QL$，即 Q 为 Rt$\triangle PLG$ 的斜边 PG 的中点. 连 HG，由 $\angle DFC = \angle ABC = \angle DHC$，知 $HD = DF$，有 $\angle HGD = \angle DGF = \angle LGP = \angle QLG$，从而 $HG /\!/ ML$，即 SQ 是 $\triangle PHG$ 的中位线，亦即 $HS = SP$.

又 $PL /\!/ KH$，有 $\angle LPS = \angle KHS$ 及 $\angle PSL = \angle HSK$，于是 $\triangle PSL \cong \triangle HSK$，即有 $PL \underline{\parallel} KH$，亦即四边形 $PKHL$ 为平行四边形，故 $PK /\!/ LH$.

评注 由此例可得，三角形外接圆周上一点 P 与垂心 H 的连线段 PH，被关于 P 点的西姆松线所平分.

例 10 如图 1-45 所示，一条直线 l 与 $\odot O$ 不相交，E 是 l 上一点，$OE \perp l$，M 是 l 上任意异于 E 的点，从 M 作圆的两条切线分别切圆于 A 和 B，点 C 是 MA 上的点，使得 $EC \perp MA$，D 是 MB 上的点，使得 $ED \perp MB$，直线 CD 交 OE 于 F. 求证：F 的位置不依赖于 M 的位置.

证明 设 $EM = x$，$OE = a$，圆半径为 R，连接 OM. 设 OM 交 AB 于 J，OE 交 AB 于 H，则易知 $OJ \perp AB$，从而得 $\angle AJM = \angle OEM = 90°$，$J$、$M$、$E$、$H$ 四点共圆.

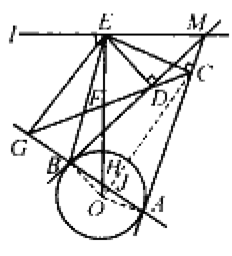


图 1-45

所以 $OH \cdot OE = OJ \cdot OM = OA^2$，

即 $OH = \dfrac{R^2}{a}$，$EH = OE - OH = \dfrac{a^2 - R^2}{a}$.

设 E 在 AB 上的射影为 G，由于 E、A、B 都在以 OM 为直径的圆上，对这个圆的内接三角形 MAB，点 E 的西姆松线 CD 通过点 G.

连 EB，由 E、G、B、D 共圆，$\angle EGD = \angle EBD$；由 E、B、O、M 共圆，$\angle EBD = \angle EOM = 90° - \angle GHE$，得 $\angle FGH = 90° - \angle EGD = \angle GHE$. 从而 F 是直角三角形 EGH 斜边的中点. 又 $EF = \dfrac{1}{2}EH = \dfrac{a^2 - R^2}{2a}$ 为定值，故 F 为定点，它的位置与点 M 的位置无关.

思考交流

思考题1 如图1-46，延长凸四边形 $ABCD$ 的边 AB、DC 交于 E，延长 AD、BC 交于 F. 试证：$\triangle BCE$、$\triangle CDF$、$\triangle ADE$、$\triangle ABF$ 的四个外接圆共点.

证明 设$\triangle BCE$与$\triangle CDF$的两个外接圆除交于点 C 外，另一交点为 M. 设点 M 在直线 BE、EC、BC 上的射影分别为 P、Q、R，则由西姆松定理，知 P、Q、R 三点共线.

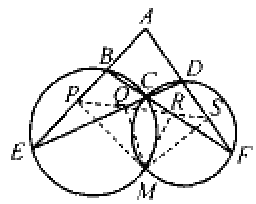


图 1-46

同样，M 点在直线 DC、CF、DF 上的射影 Q、R、S 也三点共线，故 P、Q、R、S 四点共线.

在$\triangle ADE$中，P 在 AE 上，Q 在 DE 上，S 在边 AD 所在直线上，且 P、Q、S 三点共线，则由西姆松定理的逆定理，知 M 点在$\triangle ADE$的外接圆上.

在$\triangle ABF$中，P 在直线 AB 上，R 在 BF 上，S 在 AF 上，且 P、R、S 三点共线，由西姆松定理的逆定理，知 M 点在$\triangle ABF$的外接圆上.

故$\triangle BCE$、$\triangle CDF$、$\triangle ADE$、$\triangle ABF$的四个外接圆共点.

思考题2 若$\triangle ABC$的三边为连续整数，且最大角$\angle B$是最小角$\angle A$的两倍，求三角形的三边长.

解法1 作$\angle ABC$的平分线 BD(图略)，则 $BD=AD$，令 $AD=y$，$AB=x$，则

$AC=x+1$，$BC=x-1$，$CD=x+1-y$.

由斯特瓦尔特定理的推论3，有 $y^2=x(x-1)-y(x+1-y)$，即 $y=\dfrac{x(x-1)}{x+1}$，又$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{CD}$，即$\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{y}{x+1-y}$，有 $y=\dfrac{x(x+1)}{2x-1}$.

故由$\dfrac{x^2-x}{x+1}=\dfrac{x^2+x}{2x-1}$，求得 $x=5$(舍去 $x=0$)，即 $AB=5$，$BC=4$，$AC=6$.

解法2 作$\triangle ABC$的外接圆 O，取$\overset{\frown}{AC}$的中点 D，连 AD、BD、CD，则 $ABCD$ 为梯形，其中 $CD/\!/BA$. 令 $AB=x$，则 $AC=x+1$，$BC=x-1$，且 $CD=BC=x-1$，$BD=AC=x+1$. 对四边形 $ABCD$ 应用托勒密定理，有$(x+1)^2=x(x-1)+(x-1)^2$，求得 $x=5$.(下略)

思考题3 如图1-47，x、y、z 为$\triangle ABC$的外心 O 到三边的距离，R、r 分别为$\triangle ABC$的外接圆和内切圆半径，求证：$x+y+z=R+r$.

证明 连结 OB、DF. 设$\triangle ABC$三边长 $AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，则 $DF=\dfrac{1}{2}b$，$OB=R$.

因 O、F、B、D 四点共圆，由托勒密定理，得

$BD\cdot OF+BF\cdot OD=BO\cdot DF$.

即 $\frac{1}{2}az+\frac{1}{2}ca=R\cdot\frac{1}{2}b$，$az+cx=Rb$.

同理 $ay+bx=Rc$，$bz+cy=Ra$.

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(cz+ax+by)=\frac{r}{2}(a+b+c)$.

即 $cz+ax+by=r(a+b+c)$.

上述四式相加，即得结论 $x+y+z=R+r$.

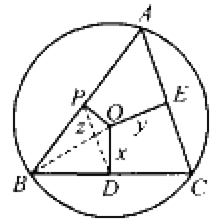


图 1-47

同步检测

1. 如图 1-48，在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c. 若角 A、B、C 的大小成等比数列，且 $b^2-a^2=ac$，则角 B 的弧度数等于多少？

2. 如图 1-49，在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，$\angle BAD=\angle BCD=90°$，$AB=2$，$CD=1$，对角线 AC、BD 交于点 O. 求 $\sin\angle AOB$.

3. 如图 1-50，在锐角 $\triangle ABC$ 的 BC 边上有两点 E、F，满足 $\angle BAE=\angle CAF$，作 $FM\perp AB$ 于 M，$FN\perp AC$ 于 N，延长 AE 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 D. 证明：四边形 $AMDN$ 与 $\triangle ABC$ 的面积相等.

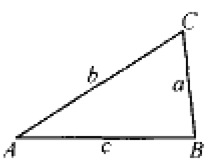


图 1-48

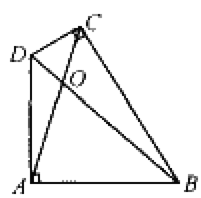


图 1-49

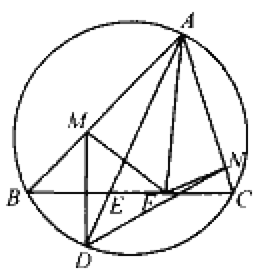


图 1-50

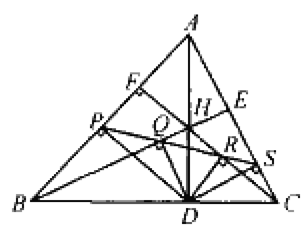


图 1-51

4. 如图 1-51，AD、BE、CF 为 $\triangle ABC$ 的三条高线，自 D 点作 $DP\perp AB$ 于 P，$DQ\perp BE$ 于 Q，$DR\perp CF$ 于 R，$DS\perp AC$ 于 S，连 PS. 求证：Q、R 在直线 PS 上.

5. 如图 1-52，P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上一点，作 $PA'\perp BC$ 交圆周于 A'，作 $PB'\perp$ 直线 AC 交圆周于 B'，作 $PC'\perp AB$ 交圆周于 C'. 求证：$AA'\parallel BB'\parallel CC'$.

6. 如图 1-53，在 $\triangle ABC$ 中，$AC>BC$，F 是 AB 的中点，过 F 作它的外接圆的直径 DE，使 C 和 E 在 AB 的同一侧. 又过 C 作 AB 的平行线交 DE 于 L，求证：$(AC+BC)^2=$

$AD L \cdot EF$.

7. 如图 1-54，在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，AE平分$\angle A$，且交BC于E，在BC上有一点S，使$BS=EC$. 求证：$AS^2-AE^2=(AB-AC)^2$.

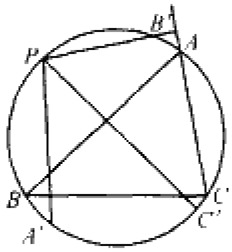


图 1-52

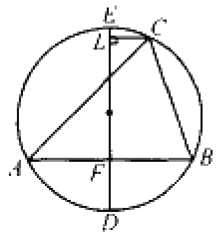


图 1-53

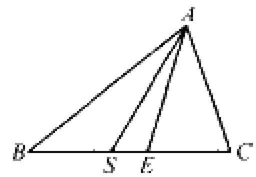


图 1-54

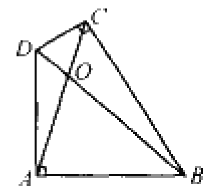


图 1-55

8. 如图 1-55，在凸四边形$ABCD$中，$\angle ABC=60°$，$\angle BAD=\angle BCD=90°$，$AB=2$，$CD=1$，对角线$AC$、$BD$交于点$O$. 求$\sin\angle AOB$.

9. 如图 1-56，已知点D是$\triangle ABC$形内一点，满足$DA \cdot DB \cdot AB+DB \cdot DC \cdot BC+DC \cdot DA \cdot CA=AB \cdot BC \cdot CA$，把$\triangle ADC$沿$CB$方向平移至$\triangle A_1D_1B$，求证：$A$、$D$、$B$、$D_1$、$A_1$五点共圆.

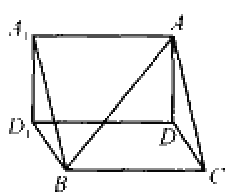


图 1-56

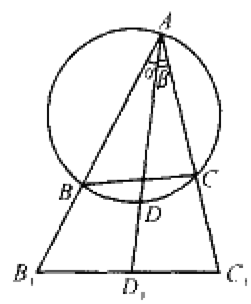


图 1-57

10. 如图 1-57，在$\triangle ABC$中，B_1、C_1分别是AB、AC延长线上的点，D_1为B_1C_1的中点，连AD_1交$\triangle ABC$外接圆于D. 求证：$AB \cdot AB_1+AC \cdot AC_1=2AD \cdot AD_1$.

第3讲 平面几何中几个易被忽视的定理

知识点金

平面几何中还有许多非常重要的定理，有些可用前面的定理直接证得，有些定理则易被忽视，但它们的作用却较大，本讲介绍其中的一些定理. 限于篇幅，有些定理只介绍，不再给出证明及应用. 由于张角定理的应用较多，本讲主要介绍张角定理的应用.

张角定理 设 A、C、B 顺次分别是平面内一点 P 所引三条射线 PA、PC、PB 上的点，线段 AC、CB 对于点 P 的张角分别为 α、β，且 $\alpha+\beta<180°$，则 A、C、B 三点共线的充要条件是：$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{PC}=\dfrac{\sin\alpha}{PB}+\dfrac{\sin\beta}{PA}$.

证明 如图 1-58，A、C、B 三点共线

$\Leftrightarrow S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ACP}+S_{\triangle CBP}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}PA\cdot PB\cdot\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}PA\cdot PC\cdot\sin\alpha+\dfrac{1}{2}PC\cdot PB\cdot\sin\beta$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{PC}=\dfrac{\sin\alpha}{PB}+\dfrac{\sin\beta}{PA}$.

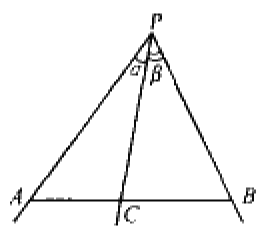


图 1-58

推论 在定理的条件下，且 $\alpha=\beta$，即 PC 平分 $\angle APB$ 时，则 A、C、B 三点共线的充要条件是：$\dfrac{2\cos\alpha}{PC}=\dfrac{1}{PB}+\dfrac{1}{PA}$.

上述定理把平面几何和三角函数紧密相联，它给出了用三角法处理平面几何问题的一个颇为有用的公式. 用它去解几何题，适当地配合三角形面积公式、正弦定理、三角公式、几何知识，可以大大简化解题步骤，众多的几何问题可以得到简捷地统一解决.

蝴蝶定理 已知 M 是 $\odot O$ 的弦 AB 的中点，过 M 任作两弦 CD、EF，连 CF、DE 分别交 AB 于 G、H，则 $MH=MG$.

证明 如图 1-59，令 $\angle AMF=\angle BME=\alpha$，$\angle BMD=\angle AMC=\beta$. 以 M 为视点，对 $\triangle MDE$ 和 $\triangle MCF$ 分别应用张角定理，有

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{MH}=\frac{\sin\beta}{ME}+\frac{\sin\alpha}{MD},$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{MG}=\frac{\sin\beta}{MF}+\frac{\sin\alpha}{MC}.$$

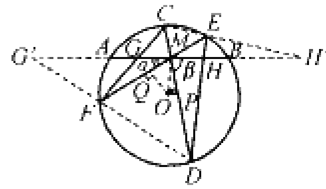


图 1-59

上述两式相减，得

$$\sin(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{MH}-\frac{1}{MG}\right)=\frac{\sin\beta}{ME\cdot MF}(MF-ME)-\frac{\sin\alpha}{MC\cdot MD}(MD-MC).$$

设 P、Q 分别是 CD、EF 的中点，由 $OM\perp AB$，有

$$\begin{cases}MD-MC=2MP=2OM\cdot\cos(90^\circ-\beta)=2OM\cdot\sin\beta,\\ MF-ME=2MQ=2OM\cdot\cos(90^\circ-\alpha)=2OM\cdot\sin\alpha.\end{cases}$$

于是 $\sin(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{MH}-\frac{1}{MG}\right)=0$. 而 $\alpha+\beta\neq180^\circ$，知 $\sin(\alpha+\beta)\neq0$. 故 $MH=MG$.

评注 类似地应用张角定理，可证明如图 1-60 中的 $AG'=BH'$.

斯坦纳-莱默斯(Steiner-Lehmus)定理

有两条内角平分线相等的三角形是等腰三角形.

在△ABC 中，BD、CE 分别是∠ABC、∠ACB 的平分线. 若 $BD=CE$，则 $AB=AC$.

证明 如图 1-60，令∠ABD=∠$DBC=\alpha$，∠BCE=∠$ACE=\beta$，分别以 B、C 为视点，对△ABC 应用张角定理的推论，有 $\frac{2\cos\alpha}{BD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}$，$\frac{2\cos\beta}{CE}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}$.

亦有 $$\frac{2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha}{AB+BC}=BD=CE=\frac{2AC\cdot BC\cdot\cos\beta}{AC+BC},$$

亦即 $$\frac{AB(AC+BC)}{AC(AB+BC)}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

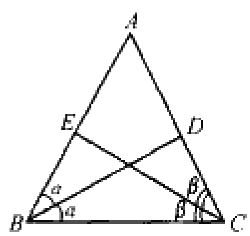


图 1-60

对上式应用分比定理，把 $\cos\beta-\cos\alpha$ 化为积，并变形可得

$$AB-AC=-\frac{2AC(AB+BC)}{BC\cdot\cos\alpha}\cdot\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.\quad①$$

显然，α、β、$|\alpha\pm\beta|$ 均只能为锐角.

若 $AB>AC$，则①式左端为正，而右端为负，

若 $AB<AC$，则①式左端为负，而右端为正.

所以 $AB=AC$.

利用以上定理及平面几何中常用的方法和证明技巧，还可以证明一些著名的定理和结论.

定理 1 **(莱莫恩 Lemoine)** 过△ABC 的三个顶点 A、B、C 作它的外接圆的切线，分别和 BC、CA、AB 的延长线交于 P、Q、R，则 P、Q、R 三点共线.

定理 2 （莫利 Morley） 将任意三角形的各角三等分，则每两个角的相邻三等分线的交点构成一个正三角形.

定理 3 （笛沙格 Desargues） 在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，若AA'、BB'、CC'相交于一点S，则AB与$A'B'$，BC与$B'C'$，AC与$A'C'$的交点F、D、E共线.

定理 4 （卡诺 Carnot） 通过$\triangle ABC$外接圆上的一点P，引与三边BC、CA、AB分别成同向等角（即$\angle PDB=\angle PEC=\angle PFB$）的直线$PD$、$PE$、$PF$，与三边或其所在直线的交点分别为$D$、$E$、$F$，则$D$、$E$、$F$三点共线.

定理 5 （清宫定理） 设P、Q为$\triangle ABC$外接圆上的异于A、B、C的两点，P点关于三边BC、CA、AB的对称点分别为U、V、W. 这时，QU、QV、QW和边BC、CA、AB所在直线的交点分别为D、E、F，则D、E、F三点共线.

定理 6 （牛顿 Newton） 设四边形$ABCD$外切于$\odot O$. 对角线AC和BD的中点分别为M、N，则M、N、O三点共线.

定理 7 （Pascal） 圆内接六边形$ABCDEF$的AB边与DE边，BC边与EF边，CD边与FA边所在直线分别相交于H、K、I，则H、K、I三点共线.

定理 8 （奥倍尔 Opial） 通过$\triangle ABC$的顶点A、B、C引互相平行的三条直线，与$\triangle ABC$的外接圆的交点分别为A'、B'、C'. 在$\triangle ABC$的外接圆上取一点P. 设PA'、PB'、PC'与$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB或其延长线的交点分别为D、E、F，则D、E、F三点共线.

例题精析

例 1 如图 1-61，过正$\triangle ABC$外接圆的$\overset{\frown}{AC}$上一点P作$PD\perp$直线AB于D，作$PE\perp AC$于E，作$PF\perp BC$于F. 求证：$\dfrac{1}{PF}+\dfrac{1}{PD}=\dfrac{1}{PE}$.

证明 由$PD\perp$直线AB于D，$PE\perp AC$于E，$PF\perp BC$于F，知A、E、P、D及E、F、C、P分别四点共圆，则$\angle DPE=\angle BAE=60°$，$\angle EPF=\angle ECF=60°$.

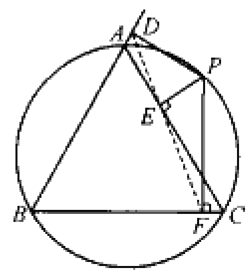


图 1-61

由西姆松定理，知D、E、F三点共线，从而以P为视点，对$\triangle PDF$应用张角定理，有$\dfrac{\sin\angle DPF}{PE}=\dfrac{\sin\angle DPE}{PF}+\dfrac{\sin\angle EPF}{PD}$，即$\dfrac{\sin 120°}{PE}=\dfrac{\sin 60°}{PF}+\dfrac{\sin 60°}{PD}$，故$\dfrac{1}{PF}+\dfrac{1}{PD}=\dfrac{1}{PE}$.

例 2 如图 1-62，在四边形$ABCD$中，对角线AC平分$\angle BAD$.

在 CD 上取一点 E，BE 与 AC 相交于 F，延长 DF 交 BC 于 G. 求证：$\angle GAC=\angle EAC$.

证明 作 $\angle CAG'=\angle CAE$，交 BC 于 G'. 只须证 G'、F、D 三点共线. 设 $\angle BAC=\angle CAD=\theta$，$\angle CAG'=\angle CAE=\alpha$.

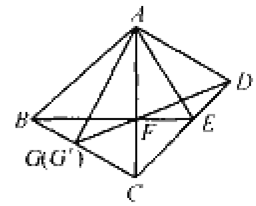


图 1-62

以 A 为视点，分别对 B、F、E，B、G'、C，C、E、D 应用张角定理，有

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{AF}=\frac{\sin\alpha}{AB}+\frac{\sin\theta}{AE}, \quad ①$$

$$\frac{\sin\theta}{AG'}=\frac{\sin\alpha}{AB}+\frac{\sin(\theta-\alpha)}{AC}, \quad ②$$

$$\frac{\sin\theta}{AE}=\frac{\sin\alpha}{AD}+\frac{\sin(\theta-\alpha)}{AC}, \quad ③$$

由①－②＋③式，得 $\frac{\sin(\theta+\alpha)}{AF}=\frac{\sin\alpha}{AD}+\frac{\sin\theta}{AG'}$.

又以 A 为视点，对 G'、F、D 应用张角定理，知 G'、F、D 三点共线.

由此，知 G' 与 G 重合，故 $\angle GAC=\angle EAC$.

例 3 如图 1-64，在"筝形"$ABCD$ 中，$AB=AD$，$BC=DC$. 经过 AC 与 BD 的交点 O 任作两条直线，分别交 AD 于 E，交 BC 于 F，交 AB 于 G，交 CD 于 H，GF、EH 分别交 BD 于 I、J. 求证：$OI=OJ$.

证明 令 $\angle AOE=\alpha$，$\angle EOD=\beta$，$\angle DOH=\gamma$，$\angle COH=\delta$. 由题设，知 AC 垂直平分 BD 于 O，以 O 为视点，考虑分别在 OJ、OI 所在的三角形 $\triangle EOH$ 及 $\triangle GOF$ 中应用张角定理.

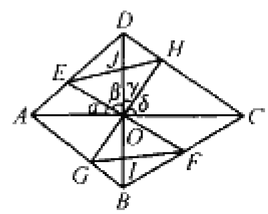


图 1-63

但在 $\triangle EOH$ 中，涉及 OE、OH，于是，又在 $\triangle AOD$、$\triangle COD$ 及 $\triangle EOH$ 中分别应用张角定理，有 $\frac{\sin 90^\circ}{OE}=\frac{\sin\alpha}{OD}+\frac{\sin\beta}{OA}$，$\frac{\sin 90^\circ}{OH}=\frac{\sin\gamma}{OC}+\frac{\sin\delta}{OD}$，$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{OJ}=\frac{\sin\beta}{OH}+\frac{\sin\gamma}{OE}$.

由上述三式，有

$$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{OJ}=\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{OC}+\frac{\sin\beta\cdot\sin\delta}{OD}+\frac{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}{OD}+\frac{\sin\gamma\cdot\sin\beta}{OA}.$$

同理，在 $\triangle AOB$、$\triangle COB$ 及 $\triangle GOE$ 中分别应用张角定理，有

$$\frac{\sin(\gamma+\beta)}{OI}=\frac{\sin\gamma\cdot\sin\beta}{OC}+\frac{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}{OB}+\frac{\sin\beta\cdot\sin\delta}{OB}+\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{OA}.$$

注意到 $OD=OB$，则有 $\frac{1}{OJ}=\frac{1}{OI}$，故 $OI=OJ$.

评注 此题可用蝴蝶定理来证明，留给读者自己证明.

例 4 如图 1-64，I、H 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的内心和垂心，点 B_1、C_1 分别为边 AC、

AB 的中点.已知射线 B_1I 交边 AB 于点 $B_2(B_2\neq B)$,射线 C_1I 交 AC 的延长线于点 C_2,B_2C_2 与 BC 相交于 K,A_1 为$\triangle BHC$ 的外心.试证:A、I、A_1 三点共线的充分必要条件是$\triangle BKB_2$ 和$\triangle CKK_2$ 的面积相等.

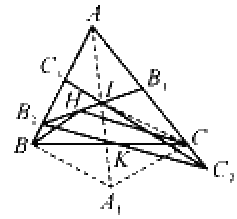


图 1-64

证明 首先证明:$S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKK_2}\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,连 IC,在$\triangle ACI$ 与$\triangle ABC$ 中运用正弦定理,有

$$\frac{AI}{\sin\frac{1}{2}\angle C}=\frac{AC}{\sin\angle AIC}=\frac{AC}{\cos\frac{1}{2}\angle B}=4R\cdot\sin\frac{1}{2}\angle B,\text{即 } AI=4R\cdot\sin\frac{1}{2}\angle B\cdot\sin\frac{1}{2}\angle C.$$

又 $AB_1=\frac{1}{2}AC=R\cdot\sin\angle B$.

在$\triangle AB_1B_2$ 中,注意 AI 平分$\angle A$,以 A 为视点,在此三角形中应用张角定理的推论,有$\frac{2\cos\frac{1}{2}\angle A}{AI}=\frac{1}{AB_1}+\frac{1}{AB_2}$,

即有 $$AB_2=\frac{1}{\frac{2\cos\frac{1}{2}\angle A}{AI}-\frac{1}{AB_1}}=\frac{2R\cdot\cos\frac{1}{2}\angle B\cdot\sin\frac{1}{2}\angle C\cdot\sin\frac{1}{2}\angle B}{\cos\frac{1}{2}\angle A\cdot\cos\frac{1}{2}\angle B-\sin\frac{1}{2}\angle C}$$

$$=\frac{2R\cdot\cos\frac{1}{2}\angle B\cdot\sin\frac{1}{2}\angle C}{\sin\frac{1}{2}\angle A}.$$

同理 $AC_2=\dfrac{2R\cdot\cos\frac{1}{2}\angle C\cdot\sin\frac{1}{2}\angle B}{\sin\frac{1}{2}\angle A}$.

从而 $S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}\Leftrightarrow AB\cdot AC=AB_2\cdot AC_2$

$$\Leftrightarrow\sin\angle C\cdot\sin\angle B=\frac{\sin\frac{1}{2}\angle C\cdot\cos\frac{1}{2}\angle B}{\sin\frac{1}{2}\angle A}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\angle B\cdot\cos\frac{1}{2}\angle C}{\sin\frac{1}{2}\angle A}$$

$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{\angle A}{2}=1$,注意到$\angle A$ 为三角形内角$\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

其次,再证$\angle BAC=60°\Leftrightarrow A$、$I$、$A_1$ 三点共线.

连 BA_1、CA_1，在$\triangle ABA_1$ 和$\triangle ACA_1$ 中分别应用正弦定理，有

$$\frac{A_1A}{\sin\angle ABA_1}=\frac{A_1B}{\sin\angle A_1AB},\ \frac{A_1A}{\sin\angle ACA_1}=\frac{A_1C}{\sin\angle A_1AC}.$$

因 I 为$\triangle ABC$ 的内心，A、I、A_1 共线$\Leftrightarrow\angle A_1AB=\angle A_1AC\Leftrightarrow\angle ABA_1$ 与$\angle ACA_1$ 均为锐角，$\sin\angle ABA_1=\sin\angle ACA_1\Leftrightarrow\angle ABA_1\neq\angle ACA_1$（因 $AB\neq AC$）时，$\angle ABA_1+\angle ACA_1=180°\Leftrightarrow A$、$B$、$A_1$、$C$ 四点共圆.

注意到$\odot A_1$ 中圆周角与圆心角的关系，有$\angle BA_1C=360°-2\angle BHC=360°-2(180°-\angle A)=2\angle A$，且$\angle BA_1C+\angle A=180°\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

例 5 如图 1-65，在$\triangle ABC$ 中，令$\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$，$\angle C=\gamma$，且 $\alpha>\beta$，AD、BE、CF 是它的三条垂线，AP、BQ 是两条角平分线，I、O 分别是它的内心和外心. 证明：点 D、I、E 共线当且仅当 P、O、Q 共线，当且仅当 O、I、F 共线.

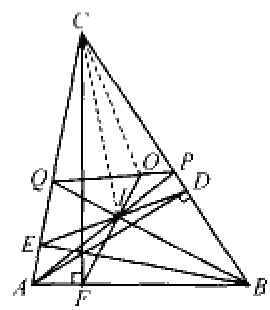


图 1-65

证明 由于外心 O 有在$\triangle ABC$ 内、外、边上三种情形，故须对 α 分三种情况讨论.

（Ⅰ）当 α 为锐角时.

设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，令 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，连 CO、CI，则 $CP=\dfrac{ab}{b+c}$，$CQ=\dfrac{ab}{a+c}$，$\angle OCQ=\dfrac{\pi}{2}-\beta$，$\angle OCP=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，$CD=b\cdot\cos\gamma$，$CE=a\cdot\cos\gamma$，$CI=\dfrac{r}{\sin\dfrac{\gamma}{2}}$，$\angle OCI=\angle ICF=\dfrac{\pi}{2}-\beta-\dfrac{\gamma}{2}$（或$\dfrac{\gamma}{2}+\alpha-\dfrac{\pi}{2}$），$\angle OCF=\pi-2\beta-\gamma$（或 $\gamma+2\alpha-\pi$）.

以 C 为视点，分别考察$\triangle PCQ$、$\triangle DCE$、$\triangle OCF$，并应用张角定理.

P、O、Q 共线$\Leftrightarrow\dfrac{\sin\gamma}{OC}=\dfrac{\sin\angle OCP}{CQ}+\dfrac{\sin\angle OCQ}{CP}$

$\Leftrightarrow ab\cdot\sin\gamma=R[(a+c)\cdot\cos\alpha+(b+c)\cdot\cos\beta]$

$\Leftrightarrow 4R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=R^2[\sin2\alpha+\sin2\beta+2\sin\gamma(\cos\alpha+\cos\beta)]$

$\Leftrightarrow R^2(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma)=R^2[\sin2\alpha+\sin2\beta+2\sin\gamma(\cos\alpha+\cos\beta)]$

$\Leftrightarrow\sin2\gamma=2\sin\gamma(\cos\alpha+\cos\beta)\Leftrightarrow\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta$.

D、I、E 共线$\Leftrightarrow\dfrac{\sin\gamma}{CI}=\dfrac{\sin\dfrac{\gamma}{2}}{CD}+\dfrac{\sin\dfrac{\gamma}{2}}{CE}\Leftrightarrow ab\sin\gamma\cdot\cos\gamma=r(a+b)$

$\Leftrightarrow r(a+b+c)\cdot\cos\gamma=r(a+b)\Leftrightarrow(a+b)(1-\cos\gamma)=c\cdot\cos\gamma$

$\Leftrightarrow(\sin\alpha+\sin\beta)(1-\cos\gamma)=\sin\gamma\cdot\cos\gamma$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\gamma}{2}=\sin\gamma\cdot\cos\gamma$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\gamma\Leftrightarrow\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta.$

O、I、F 共线 $\Leftrightarrow\frac{\sin\angle OCF}{CI}=\frac{\sin\angle OCI}{CF}+\frac{\sin\angle ICF}{CO}$

$\Leftrightarrow\frac{\sin(2\beta+\gamma)}{CI}=\frac{\cos(\beta+\frac{\gamma}{2})}{a\cdot\sin\beta}+\frac{\cos(\beta+\frac{\gamma}{2})}{R}\Leftrightarrow 2\sin(\beta+\frac{\gamma}{2})=\frac{CI}{2R\sin\alpha\cdot\sin\beta}+\frac{CI}{R}\Leftrightarrow 2\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{r}{2R\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}+\frac{r}{R\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}$（注意 $\beta+\frac{\gamma}{2}\neq\frac{\pi}{2}$，$r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$）

$\Leftrightarrow 2\sin(\beta+\frac{\gamma}{2})=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}+4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}$

$\Leftrightarrow 4\sin(\beta+\frac{\gamma}{2})\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=1+2\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\Leftrightarrow\sin(\beta+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2})+\sin(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}-\frac{\alpha}{2})-\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2})+\sin(\beta-\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2})$

$=1+\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

$\Leftrightarrow\cos\beta+\cos\alpha+1+\cos(\alpha-\beta)=1+\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma\Leftrightarrow\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta.$

因此，D、I、E 共线 $\Leftrightarrow P$、O、Q 共线 $\Leftrightarrow O$、I、F 共线.

（Ⅱ）当 α 为钝角时，注意 $\angle OCP=\alpha-\frac{\pi}{2}$，依照（Ⅰ）类似证明.

（Ⅲ）当 α 为直角时，易证点 D、I、E 共线当且仅当 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形；点 P、O、Q 共线当且仅当 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形；点 O、I、F 共线当且仅当 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形. 综合即证.

评注　在 $\triangle ABC$ 中，可证得：$\cos\angle C=\cos\angle A+\cos\angle B$，当且仅当 $\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 AB 边上的旁切圆半径. 因此本例题还等价于 $\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 AB 边上的旁切圆半径，此为 1998 年全国高中联赛平面几何题结论.

蝴蝶定理是很多读者所熟悉的一个定理，平几中许多问题可用蝴蝶定理来证明. 它的证法较多，前面给出了用张角定理来证明的方法，当然它有一个纯几何的证法，就是直接关于 AB 的垂直平分线作对称得到. 下面我将介绍这个定理的面积证法.

例 6　（蝴蝶定理）如图 1-66 所示，M 是 $\odot O$ 弦 AB 的中点，PQ 和 RS 是过 M 的两条弦，PS 和 PQ 交 AB 于点 X 和 Y. 求证：$MX=MY$.

证明 记 $MK=k$，其中 K 代表字母 P、Q、R、S、X、Y. $MA=MB=a$，$PX=t$，$SX=u$，$RY=v$，$QY=w$.

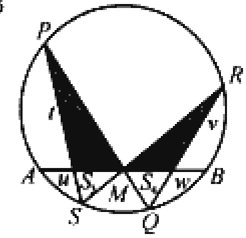


图 1-66

再记 $S_{MXP}=S_1$，$S_{MYR}=S_2$，$S_{MXS}=S_3$，$S_{MYQ}=S_4$，

由 $\angle PMX=\angle YMQ$，$\angle RMB=\angle XMS$ 得 $\frac{S_1}{S_4}=\frac{px}{qy}$，$\frac{S_3}{S_2}=\frac{xs}{ry}$，

再由 $\angle P=\angle R$，$\angle S=\angle Q$ 得 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{rv}{pt}$，$\frac{S_4}{S_3}=\frac{wq}{us}$，

将以上四式相乘得到：$1=\frac{x^2wv}{y^2ut}$，即 $x^2wv=y^2ut$.

由圆幂定理有：$wv=AY\cdot YB=(a+y)(a-y)=a^2-y^2$，$ut=AX\cdot XB=(a-x)(a+x)=a^2-x^2$.

代入上式得到 $x^2(a^2-y^2)=y^2(a^2-x^2)$

所以 $a^2x^2=a^2y^2\Rightarrow x=y$，证毕.

评注 这个解法就显得轻巧许多，就是简单的利用了一下共角定理就把一个很不好解决的东西搞定了.

很多的读者总有这样的一个想法，就是每个条件都应该对应一个式子来表示它，换而言之就是每一个式子都应该是在题目中对应于一个条件. 那么在这道题目中的四个式子都是怎么出来的呢？

首先 $\frac{S_1}{S_4}$ 和 $\frac{S_3}{S_2}$ 利用的是对顶角相等的结论，所以就对应于 PQ 和 RS 是过 M 的两条弦这个条件，而 $\frac{S_2}{S_1}$ 和 $\frac{S_4}{S_3}$ 利用的是圆周角相等的结论，这等价于四点共圆的条件. 所以说，任何的式子都不是凭空出现的，总会有它们对应的东西，只不过有些是很不显然的而已. 当然这个道理的使用价值并不是特别的人原则必不是所有人能做得到，因为你需要从条件出发而得到它的用法，这是一件很困难的事情，比如在这道题目中，事实上你根本就不会以为 PQ 和 RS 是过 M 的两条弦也算一个条件. 当然了，还是有一些题目就要利用这一原则，就是每个条件都是有用的，从而，最别扭的条件也就往往可能是题目的突破口.

有些平面几何的书上很少提到张角定理及蝴蝶定理，是因为这些定理可以用其他定理来证明的缘故，下面来证明张角定理与斯特瓦尔特定理的等价性.

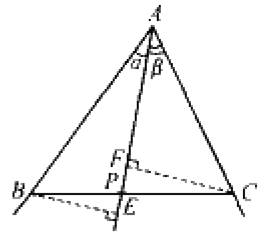
例 7 如图 1-67，设 B、P、C 依次分别为从 A 点引出的三条射线 AB、AP、AC 上的点. 线段 BP、PC 对应点 A 的张角分别为 α、β，且 $\alpha+\beta<180°$，则 B、P、C 三点共线的下述两个充要条件等价：

（Ⅰ）$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP}=\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB}$（张角定理）；

（Ⅱ）$AB^2\cdot PC+AC^2\cdot BP=AP^2\cdot BC+BP\cdot PC\cdot BC$（斯特瓦尔特定理）.

证明 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP}=\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB}\Leftrightarrow AB\cdot AC\cdot\sin(\alpha+\beta)=AP\cdot AB\cdot\sin\alpha+AP\cdot AC\cdot\sin\beta$

$\Leftrightarrow AB\cdot AC\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta+AB\cdot AC\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta=AP\cdot AB\cdot\sin\alpha+AP\cdot AC\cdot\sin\beta.$


图 1-67

作 $BE\perp$射线 AP 于 E,作 $CF\perp$射线 AP 于 F,则

$\frac{AB\cdot\sin\alpha}{AC\cdot\sin\beta}=\frac{BE}{CF}=\frac{BP}{PC}=\frac{k\cdot BP}{k\cdot PC}$

$\Leftrightarrow AC\cdot\cos\beta\cdot k\cdot BP+AB\cdot\cos\alpha\cdot k\cdot PC=AP\cdot k\cdot BP+AP\cdot k\cdot PC=AP\cdot k\cdot BC$

$\Leftrightarrow AP\cdot AC\cdot BP\cdot\frac{AC^2+AP^2-PC^2}{2AC\cdot AP}+AP\cdot AB\cdot PC\cdot\frac{AB^2+AP^2-BP^2}{2AB\cdot AP}=AP^2\cdot BC$

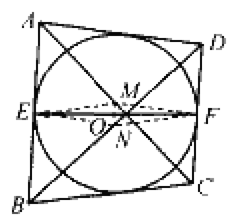
$\Leftrightarrow AB^2\cdot PC+AC^2\cdot BP=AP^2\cdot BC+BP\cdot PC\cdot BC.$

当然,其他定理的应用也较广泛,限于篇幅这里不再介绍其应用,下面介绍一例牛顿定理的应用.

例 8 求证:若一个圆外切四边形有两条对边相等,则圆心到另外两边中点的距离相等.

证明 在关于圆外切四边形的诸多定理中,容易想到牛顿(Newton)定理:

设$\odot O$的外切四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 的中点分别为 E、F,则 E、O、F 在一条直线上.


图 1-68

如能联想到这一定理,则本题的证明就轻而易举了.

设圆外切四边形为 $ABCD$,其内切圆圆心为 O,$AD=BC$,AB、CD 的中点分别为 E、F.设 AC、BD 的中点为 M、N(如图 1-68).

由牛顿定理,有 M、O、N 三点共线.又因为 $AD=BC$,则平行四边形 $MENF$ 为菱形.故 MN 为$\angle EMF$的角平分线.再由 $ME=MF$,故 $OE=OF$.

思考交流

思考题 1 如图 1-69,在线段 AB 上取内分点 M,使 $AM\leqslant BM$,分别以 MA、MB 为边,在 AB 的同侧作正方形 $AMCD$ 和 $MBEF$,$\odot P$ 和$\odot Q$ 分别是这两个正方形的外接圆,两圆交于 M、N.求证:B、C、N 三点共线.

证明 连 MD、ME、NE、ND、NM，则 $\angle DNM=\angle ENM=90^\circ$，则 D、N、E 三点共线，注意 $\angle DME=45^\circ+45^\circ=90^\circ$.

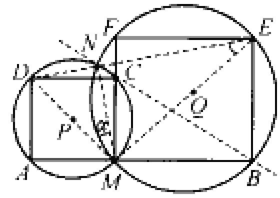


图 1-69

设 $\angle DMN=\angle NEM=\alpha$，$\odot P$、$\odot Q$ 的半径分别为 r_1、r_2，则 $MC=\sqrt{2}r_1$，$MB=\sqrt{2}r_2$，$MN=2r_1\cdot\cos\alpha=2r_2\cdot\sin\alpha$. 对视点 M，考察点 B、C、N 所在的 $\triangle MBN$.

由 $\dfrac{\sin\angle CMB}{MN}+\dfrac{\sin\angle CMN}{MB}$

$$=\frac{\sin 90^\circ}{2r_2\sin\alpha}+\frac{\sin(45^\circ-\alpha)}{\sqrt{2}r_2}=\frac{1+\sqrt{2}\sin\alpha\cdot\sin(45^\circ-\alpha)}{2r_2\cdot\sin\alpha}$$

$$=\frac{1+\sin\alpha\cdot(\cos\alpha-\sin\alpha)}{2r_1\cdot\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2r_1\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2r_1}=\frac{\sqrt{2}\cdot\cos(45^\circ-\alpha)}{2r_1}=\frac{\cos(45^\circ-\alpha)}{\sqrt{2}r_1}$$

$$=\frac{\sin(90^\circ+45^\circ-\alpha)}{\sqrt{2}r_1}=\frac{\sin\angle NMB}{MC}.$$

应用张角定理，即知 B、C、N 三点共线.

同步检测

1. 如图 1-70，$\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 对应的三边长分别为 a、b、c，E 为其内切圆圆心，AE 交 BC 于 D. 求证：$\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{b+c}{a}$.

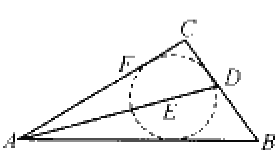


图 1-70

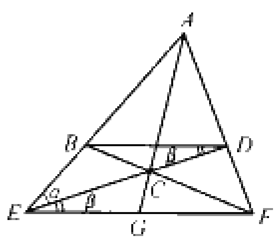


图 1-71

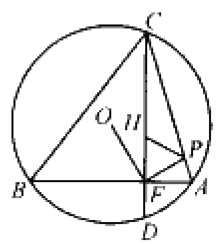


图 1-72

2. 如图 1-71，在四边形 $ABCD$ 中，两组对边延长后得交点 E、F，对角线 $BD\parallel EF$，AC 的延长线交 EF 于 G. 求证：$EG=GF$.

3. 如图 1-72，$\triangle ABC$ 是锐角三角形，且 $BC>CA$，O 是它的外心，H 是它的垂心，F

是高 CH 的垂足，过 F 作 OF 的垂线交边 CA 于 P. 求证：$\angle FHP=\angle BAC$.

4. 如图 1-73，在平行四边形 $ABCD$ 中，在 AB 边上取一点 P，使 $AB=3AP$，在边 AD 上取点 Q，使 $AD=4AQ$，且 PQ 交 AC 于 M. 求证：$AC=7AM$.

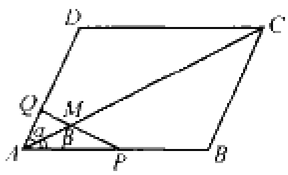


图 1-73

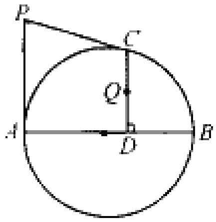


图 1-74

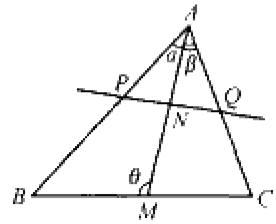


图 1-75

5. 如图 1-74，AB 是圆的直径，PA、PC 是圆的切线，A、C 为切点. 作 $CD\perp AB$ 于 D，Q 为 CD 的中点. 求证：P、Q、B 三点共线.

6. 如图 1-75，AM 是△ABC 的边 BC 上的中线，任作一直线顺次交 AB、AC、AM 于 P、Q、N. 求证：$\frac{AB}{AP}$，$\frac{AM}{AN}$，$\frac{AC}{AQ}$成等差数列.

7. 如图 1-76，AD、AE 分别是△ABC 的内外角平分线，点 D 在 BC 边上，点 E 在 BC 边的延长线上. 求证：$\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{2}{DE}$.

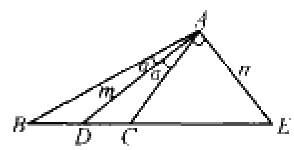


图 1-76

第二章 三角形中的特殊点

第1讲 三角形中的心

知识点金

三角形中的心是指重心、外心、内心、垂心、旁心和界心. 三角形的心是三角形的重要几何点，在奥林匹克数学中，有关三角形的心的几何问题是竞赛的热点问题，因此，我们对三角形的心的几何性质作概括归纳，对有关的证明方法和解题技巧作深入探讨.

1. **重心**

三角形的三条中线交于一点，这个交点即为三角形的重心，重心把中线分成2∶1两部分，在$\triangle ABC$中重心通常用G表示，重心的位置总在三角形的内部.

设G是$\triangle ABC$的重心，AG的延长线交BC于D，则

(1)$BD=DC$；(2)$AD^2=\frac{1}{4}(2AB^2+2AC^2-BC^2)$；

(3)$AG:AD=2:3$；(4)$S_{\triangle GBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

2. **外心**

三角形的三边中垂线交于一点，这个交点即为三角形的外心，它是外接圆的圆心，$\triangle ABC$的外心常用O表示，钝角三角形的外心在形外，直角三角形的外心在斜边的中

点，锐角三角形的外心在形内.

设⊙$O(R)$是△ABC的外接圆，$OD\perp BC$于D交⊙O于E，则

(1)$OA=OB=OC=R$；(2)$\angle BOC=2\angle A$[或$2(180^\circ-\angle A)$]；

(3)$BD=DC$，$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{EC}$；(4)$S_{\triangle ABC}=\dfrac{abc}{4R}$或$R=\dfrac{abc}{4S_{\triangle ABC}}$.

3. **内心**

三角形的三条内角平分线相交于一点，这个交点即为三角形的内心. 在△ABC中，内心常用I表示，其位置在△ABC的内部.

设△ABC的内切圆⊙$I(r)$切边AB于P，AI的延长线交外接圆于D，则

(1)$\angle BIC=90^\circ+\dfrac{1}{2}\angle A$；

(2)$AP=r\cdot\cot\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}(b+c-a)$；

(3)$DB=DI=DC$；

(4)$S_{\triangle ABC}=r\cdot\dfrac{1}{2}(a+b+c)$或$r=\dfrac{2\cdot S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$.

定理1 （Euler定理） 在△ABC中，R和r分别为外接圆和内切圆的半径，O和I分别为其外心和内心，则$OI^2=R^2-2Rr$.

4. **垂心**

三角形的三条高相交于一点，这个交点即为三角形的垂心，在△ABC中，垂心通常用H表示，它的位置与外心类似.

设O、G、H分别是△ABC的外心、重心和垂心，$OD\perp BC$于D，AH的延长线交外接圆于H_1，则

(1)$AH=2OD$；(2)H与H_1关于BC成轴对称；

(3)⊙BCH与⊙ABC的半径相等.

定理2 （三角形的Euler线） △ABC的重心G，垂心H和外心O共线，并且$GH=2GO$.

5. **旁心**

三角形的任意两角的外角平分线和第三个内角的角平分线相交于一点，这个交点即为三角形的旁心. 在△ABC中，旁心常用I_a、I_b、I_c表示，其位置在△ABC的外部.

设在△ABC中，$\angle A$内的旁切圆⊙$I_1(r)$与AB的延长线切于P_1，则

(1)$\angle BI_1C=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle A$；

(2)$AP_1=r_1\cot\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$；

(3) $\angle AI_1B=\frac{1}{2}\angle C$;

(4) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r_1(b+c-a)$.

对于等腰三角形,内心、外心、重心、垂心在顶角的平分线上;而对正三角形而言,则上述四心重合为一点,该点又称为正三角形的中心.

6. **界心**

如果三角形一边上的一点和这边所对的顶点把三角形的周界分割为两条等长的折线,那么就称这一点为三角形的周界中点.其中三角形的周界是指由三角形的三边所组成的围线.由于三角形的任意两边之和大于第三边,可知三角形任一边上的周界中点必介于这边两端点之间.

三角形的顶点与其对边的周界中点的连线,叫做三角形的周界中线(有时也称周界中线所在直线为三角形的周界中线).三角形三条周界中线交于一点(证明从略).

定义:称三角形三条周界中线的交点为三角形的界心.

例题精析

例1 在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,有一圆内切于$\triangle ABC$的外接圆,与AB、AC分别相切于点P和Q,求证:P和Q连线的中点是$\triangle ABC$的内切圆圆心.

证法1 如图2-1,根据对称性,易知A、K、O、D四点共线,其中K为PQ中点,O为小圆圆心.

过K作$KF\perp AC$于F,连结OQ、DC,则$OQ\perp AC$,$DC\perp AC$,得$KF/\!/OQ/\!/DC$.

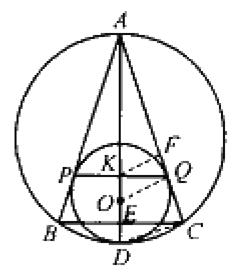


图2-1

所以$\frac{KF}{OQ}=\frac{AK}{AO}$.

于是$\frac{KF}{AK}=\frac{OQ}{AO}=\frac{OD}{AO}=\frac{CQ}{AQ}=\frac{KE}{AK}$,得$KF=KE$.

因为$KE\perp BC$.

故K点在$\angle ACB$的平分线上.

显然K点在$\angle BAC$的平分线上,故K为$\triangle ABC$的内心.

证法2 如图2-2,设PQ中点为K,易证A,K,O,D四点共线.

因为$\overset{\frown}{PD}=\overset{\frown}{QD}$.

故$\angle KPD=\angle DPB$.

于是 $Rt\triangle DPB\cong Rt\triangle DPK$，得 $PB=PK$.

于是 $\angle PKB=\angle PBK=\angle KBC$.

即 BK 平分 $\angle ABC$，从而 K 为 $\triangle ABC$ 的内心.

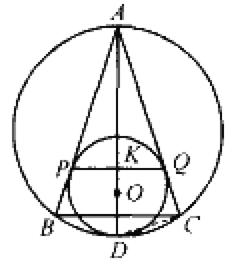


图 2-2

例 2 点 A 在 $\angle KMN$ 内部，点 B 在 KM 上，点 C 在 MN 上，如果 $\angle CBM=\angle ABK$，$\angle BCM=\angle ACN$，求证：$\triangle BCM$ 的外心在 AM 上.

证明 如图 2-3，由对顶角相等及 $\angle CBM=\angle ABK$，知 BM 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线.

同理可证，CM 为 $\triangle ABC$ 的另一外角平分线.

故 M 为 $\triangle ABC$ 的旁切圆圆心.

所以，AM 平分 $\angle BAC$.

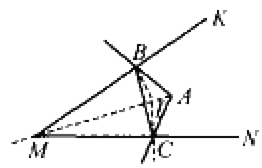


图 2-3

记 $\triangle ABC$ 的内心为 I，易知 I 在 AM 上，连结 IB、IC，由 IB 平分 $\angle ABC$ 及 $\angle CBM=\angle ABK$，知 $IB\perp BM$. 同理，有 $IC\perp CM$.

所以，I、B、M、C 四点共圆，且 MI 为直径.

因此，$\triangle BCM$ 的外心在 MI，即 AM 上.

例 3 BC 为圆 $\odot O$ 的直径，A 为 $\odot O$ 上的一点，$0°<\angle AOB<120°$，D 是弧 AB（不含 C 的弧）的中点，过 O 平行于 DA 的直线交 AC 于 I，OA 的垂直平分线交 $\odot O$ 于 E、F. 试证：I 是 $\triangle CEF$ 的内心.

证明 如图 2-4，由题设 A 为 $\overset{\frown}{EAF}$ 的中点，于是，有 CA 为 $\angle ECF$ 的平分线.

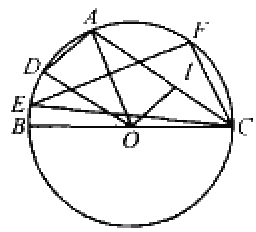


图 2-4

又由于 $OA=OC$，

$\angle AOD=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\angle OAC$.

则 $OD/\!/IA$，而 $AD/\!/IO$，

所以 $ADOI$ 为平行四边形.

又 $OEAF$ 为菱形，有

$AI=OD=OE=AF$.

所以 $\angle IFE=\angle IFA-\angle EFA=\angle AIF-\angle ECA=\angle AIF-\angle ICF=\angle IFC$.

即 IF 为 $\angle EFC$ 的平分线，故 I 是 $\triangle CEF$ 的内心.

评注 条件 $\angle AOB<120°$ 保证点 I 在 $\triangle CEF$ 的内部.

再介绍有关三角形中心的经典问题及赛题.

例 4 三角形的 Euler 线. 详见[知识点金]的定理 2.

分析 这是一个经典的定理，由重心的结论(1)有 $AH=2OM$. 这是一个常常被忽视的结论. 但是它的用处却十分大，图 2-5 给出了一种由此引出的经典辅助线：作直径 CP，那么可以得到 $APHB$ 是平行四边形.

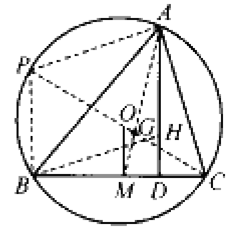


图 2-5

证明 因为 $AH=2OM$，

又延长 HG 交 OM 于点 O'，由 $AD/\!/OM$ 知

$AH=2O'M$，

所以 $OM=O'M$，

所以 O 和 O' 重合，

又因为 $\triangle AHG\backsim\triangle MOG$，

所以 $GH=2OG$.

评注 这里，直线 OGH 称为 $\triangle ABC$ 的 Euler 线.

例 5 如图 2-6，等腰三角形的外接圆半径为 R，内切圆半径为 r. 证明：外接圆和内切圆的圆心距离 $d=\sqrt{R(R-2r)}$

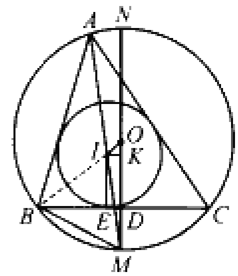


图 2-6

分析 此题对一般三角形也成立，称为欧拉定理，由此可得出一个重要的几何不等式：$R\geqslant 2r$，称为欧拉不等式. 这里将对欧拉定理给出证明如下.

证明 设 M 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，O 与 I 分别为三角形 ABC 的外接圆和内切圆的圆心，外接圆直径 MN 交 BC 于 D，连 IB、BM，AM 必过 I.

又设 $IE\perp BC$，$IK\perp MN$，E、K 为垂足.

因为 $\angle MIB=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC)=\angle IBM$.

所以 $MI=MB$.

又 $IO^2=MI^2+MO^2-2MO\cdot MK$，

而 $MB^2=MD\cdot MN=2R\cdot MD$，

所以 $d^2=2R\cdot MD+R^2-2R\cdot MK=R^2-2R\times DK=R^2-2Rr$.

评注 从上例我们看到，对于某些含有“内心”的平面几何命题，如果将“内心”改为“旁心”，将会使问题得到推广、演变. 这种作法法对我们研究问题的内在联系，拓宽证题思路和方法，以期达到触类旁通，得心应手地处理竞赛问题的能力将大有裨益. 下面我们再将第 39 届 IMO 试题 5 作此类演变、推广，以飨读者.

例 6 如图 2-7，I 为 $\triangle ABC$ 的内心，其 $\triangle ABC$ 内切圆切三边 BC、CA 和 AB 于点 K、L、M，过 B 点平行于 MK 的直线分别交直线 LM 和 LK 于点 R 和 S. 求证：$\angle RIS$ 为锐角..

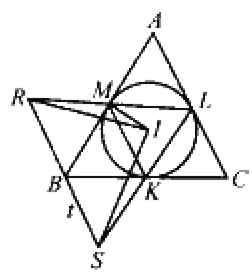


图 2-7

证明 为了证 $\angle RIS$ 是锐角. 由余弦定理，只要证：

$RI^2+SI^2-RS^2=2RI\cdot SI\cos\angle RIS>0$，

为此我们来计算 $RI^2+SI^2-RS^2$.

令 $MK/\!/RS$，考虑 $\triangle BMR$ 及 $\triangle BSK$，于是

$\angle MRB=\angle LMK=\frac{1}{2}(\pi-\angle C)$，

同理 $\angle RMB=\angle AML=\frac{1}{2}(\pi-\angle A)$，

而 $\angle MBR=\pi-\angle MRB-\angle RMB=\frac{1}{2}(\angle C+\angle A)=\frac{1}{2}(\pi-\angle B)$，

同理 $\angle KSB=\angle LKM=\frac{1}{2}(\pi-\angle A)$，

$\angle SKB=\angle LKC=\frac{1}{2}(\pi-\angle C)$，

$\angle KBS=\frac{1}{2}(\pi-\angle B)$，

由正弦定理，有

$$\frac{BR}{\sin\angle RMB}=\frac{BM}{\sin\angle MRB},\frac{BK}{\sin\angle KSB}=\frac{BS}{\sin\angle BKS},$$

因此 $\frac{BR}{BM}=\frac{\cos\frac{\angle A}{2}}{\cos\frac{\angle C}{2}}=\frac{BK}{BS}$.

令 $BI\perp MK$，所以 $BI\perp RS$. 又 $MI\perp AB$，所以考虑直角$\triangle IRB$，$\triangle ISB$、$\triangle BIM$ 有

$IR^2+IS^2-RS^2=(BI^2+RB^2)+(IB^2+BS^2)-(BR+BS)^2=2(BI)^2-2BR\cdot BS$

注意到 $BK=BM$，因此 $BR\cdot BS=BM^2$. 所以 $IR^2+IS^2-RS^2=2[(BI)^2-(BM)^2]=2(IM)^2>0$.

评注 现将本题中"内心"改为"旁心"，发现其结论仍然成立，这个演变题即为：

演变题：设 I 为$\triangle ABC$ 的旁心，其$\triangle ABC$ 旁切圆切边 AC 于点 L、切边 BA 和 BC 的延长线分别于点 M 和 K，过点 B 平行于 MK 的直线分别交直线 LM 和 LK 于点 R 和 S. 求证：$\angle RIS$ 为锐角.

证明 如图 2-8，连接 BI、MI、KI.

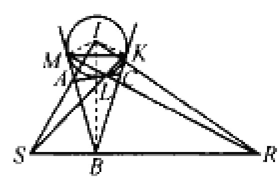


图 2-8

在 $\triangle BKS$ 与 $\triangle LMK$ 中，$\angle LKM=\angle KSB$，$\angle BKS=\angle LMK$，于是$\triangle BKS\backsim\triangle LMK$，从而$\frac{KS}{BK}=\frac{LK}{LM}$，

同理可证$\frac{BR}{BM}=\frac{LM}{LK}$.

于是 $BS\cdot BR=BK\cdot BM$，

又显然 $BI\perp MK$，$BK=BM$，从而 $BS\cdot BR=BM^2<BI^2$，即 $BS\cdot BR<BI^2$.

这表明：在 BI 内存在点 P，使得 $BR\cdot BS=BP^2$.

在$\triangle RPS$中，应用射影定理的逆定理，可知$\angle RPS=90°$，于是点I在以RS为直径的圆的外部，从而$\angle RIS<90°$.

例 7　如图 2-9，$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线与外接圆交于点D，I是内心，M为BC的中点. P为I关于M的对称点，延长DP与外接圆相交于N. 求证：线段AN、BN、CN中有两个的和等于第三个.

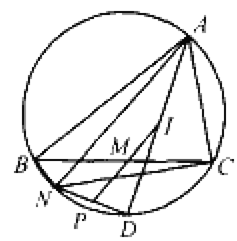


图 2-9

分析 1　这道题有一个经典解法——面积法，此法好似没道理，仿佛天外来客，但是想法确实极为精美巧妙.

证明 1　由于 $S_{BND}+S_{CND}=2S_{MND}=S_{IND}$，

而　$S_{BND}=\frac{1}{2}BN\cdot BD\cdot\sin\angle NBD$，

$S_{CND}=\frac{1}{2}CN\cdot CD\cdot\sin\angle NCD$，

$S_{NID}=\frac{1}{2}AN\cdot ID\cdot\sin\angle NAD$（请关注这个式子，想想为什么），

并且　$BD=ID=CD$，

所以 $BN+CN=AN$，

证毕.

分析 2　如果说我们的目的不只是去寻求证法的美妙，而是实用，那么可选择一个稳妥一点的方法——三角计算.

证明 2　记$\alpha=\frac{1}{2}\angle BAC$，$\beta=\angle NAD$，外接圆半径为$R$，

只需证明　$2R\sin(\alpha-\beta)+2R\sin(\alpha+\beta)=2R\sin(C+\alpha-\beta)$，

即证　$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(C+\alpha-\beta)$.　①

我们来看一看还有什么条件没有用. 我们需要的是一个限定N位置的条件，这个就是"M为IP中点". 当然，选择用比例$\frac{IM}{MP}$、$\frac{IM}{IP}$、$\frac{PM}{IP}$中的哪个是需要思考一下的. 注意到DM和DI的长度比较好描述，而DP的长度我们无法控制，所以我们选择用$\frac{PM}{IP}=\frac{1}{2}$来使用这个中点的条件.

$$\frac{1}{2}=\frac{PM}{IP}=\frac{S_{PDM}}{S_{PDI}}=\frac{\frac{1}{2}PD\cdot DM\cdot\sin\angle PDM}{\frac{1}{2}PD\cdot DI\cdot\sin\angle PDI}=\frac{DM\cdot\sin\angle PDM}{DI\cdot\sin\angle PDI}$$

$$=\frac{2R\sin^2\alpha}{2R\sin\alpha}\cdot\frac{\sin[(90°-\alpha)+(\alpha-\beta)]}{\sin(C+\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(C+\alpha-\beta)}\qquad②$$

这与①式等价.

评注 其实读者从证明的过程中应该已经看到了，证明几乎没有用到太多的计算，但是技巧的使用却很多，实用得很.

例 8 如图 2-10，O、H 分别是锐角$\triangle ABC$的外心、垂心，$\angle BAC$的角平分线交$\triangle ABC$的外接圆于点D. 点D关于直线BC的对称点为E，关于点O的对称点为F. 若AE与FH交于点G，BC的中点为M. 求证：$GM\perp AF$.

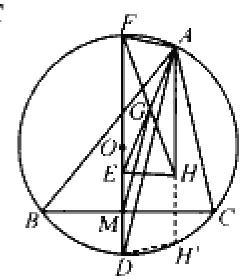


图 2-10

证明 延长AH交$\odot O$于H'，易知H与H'关于直线BC对称，所以HE和$H'D$关于直线BC对称.

又因为O、M、D三点共线，且$OD\perp BC$，所以D、M、O、E、F五点共线，所以$FD\perp BC$，所以$DF/\!/AH'$.

又DF和AH'均是$\odot O$的弦，因此，它们有公共的垂直平分线l.

因为$l\perp FD$，所以$l/\!/BC$.

而AF与$H'D$关于l对称，所以$AF\underline{\parallel}HE$，

所以四边形$AFEH$是平行四边形，所以$AG=GE$.

又由题意得$DM=ME$，所以$GM/\!/AD$.

又$\angle FAD=90°$，即$AF\perp AD$，所以$GM\perp AF$.

例 9 如图 2-11，两个半径不等的圆相交于A、B两点，公切线ST、MN与两个圆的切点分别为S、T和M、N. 求证：$\triangle AMN$、$\triangle AST$、$\triangle BMN$、$\triangle BST$的垂心是一个矩形的四个顶点.

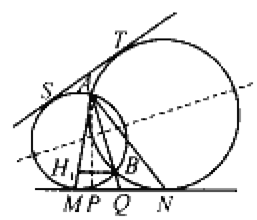


图 2-11

证明 设$\triangle AMN$、$\triangle AST$、$\triangle BMN$、$\triangle BST$的垂心分别为H_1、H_2、H_3、H_4，由对称性知四边形$H_1H_2H_3H_4$是等腰梯形，其中$H_1H_4/\!/AB/\!/H_2H_3$，所以只要证$H_1B\perp AB$.

设P、Q分别为AH_1、AB与MN的交点，则Q为MN的中点. 设AH_1与$\triangle AMN$的外接圆交于D，则$H_1P=PD$，$PM\cdot PN=PD\cdot PA=PH_1\cdot PA$. 于是，

$$\begin{aligned}AH_1\cdot AP&=(AP-H_1P)AP=AP^2-PM\cdot PN\\&=AQ^2-PQ^2-(MQ-PQ)(NQ+PQ)\\&=AQ^2-PQ^2-MQ^2+PQ^2=AQ^2-AQ\cdot BQ\\&=AQ(AQ-BQ)=AQ\cdot AB.\end{aligned}$$

所以，H_1、P、Q、B四点共圆. 又因为$AP\perp MN$，所以，$H_1B\perp AB$.

下面我们讨论界心的两个性质.

例 10 D、E、F分别为$\triangle ABC$的BC、CA、AB边上的周界中点，R、r分别为$\triangle ABC$的外接圆和内切圆的半径，则(1)$\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{r}{2R}$，(2)$S_{\triangle DEF}\leqslant\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

证明 设 $BC=a, CA=b, AB=c, 2p=a+b+c$，则由题设易知

$$\begin{cases} BD=AE=p-c \\ CD=AF=p-b \\ CE=BF=p-a \end{cases}$$

再由三角形面积比的性质，有

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AE\cdot AF}{AC\cdot AB}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc},$$

同理 $\dfrac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{(p-c)(p-a)}{ca}$，

$\dfrac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}$，

从而
$$\begin{aligned}\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}&=1-\left(\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}\right)\\&=1-\left[\frac{(p-b)(p-c)}{bc}+\frac{(p-c)(p-a)}{ca}+\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{ab}\right]\\&=\frac{-2p^3+2(ab+bc+ca)p-2abc}{abc}.\end{aligned}$$

把三角形恒等式 $ab+bc+ca=p^2+4Rr+r^2$ 和 $abc=2pRr$ 代入并整理，得 $\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{r}{2R}$.

由欧拉不等式 $R\geqslant 2r$，得 $S_{\triangle DEF}\leqslant\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

思考交流

思考题 1 如图 2-12，设 O、H 分别为锐角$\triangle ABC$ 的外心和垂心. 求证：$\triangle AOH$、$\triangle BOH$、$\triangle COH$ 中有一个的面积等于另外两个面积之和.

证明 设 BC 中点为 D，连结 AD 交 OH 于点 G.

设点 x 到 OH 距离为 d_x.

要证 $S_{\triangle AOH}=S_{\triangle BOH}+S_{\triangle COH}$，只需证 $d_A=d_B+d_C$.

又 $d_B+d_C=2d_D$，所以只需证 $2d_D=d_A$.

由欧拉线性质知 $2d_D=d_A$ 显然成立.

所以 $S_{\triangle AOH}=S_{\triangle BOH}+S_{\triangle COH}$.

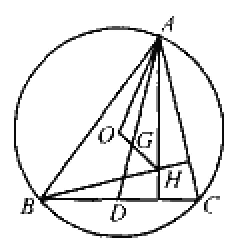


图 2-12

思考题 2 如图 2-13，在$\triangle ABC$ 中，设 $AB>AC$，过 A 作$\triangle ABC$

的外接圆的切线 l，又以 A 为圆心，AC 为半径作圆分别交线段 AB 于 D，交直线 l 于 E、F. 求证：直线 DE、DF 分别通过 $\triangle ABC$ 的内心与一个旁心.（注：与三角形的一边及另两边的延长线均相切的圆称为三角形的旁切圆，旁切圆的圆心称为旁心.）

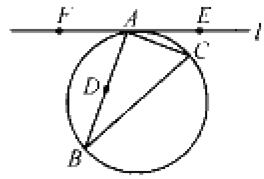


图 2-13

证明 (1)先证 DE 过 $\triangle ABC$ 的内心.

如图 2-14，连 DE、DC，作 $\angle BAC$ 的平分线分别交 DE 于 I，交 DC 于 G，连 IC，则由 $AD=DC$，得 $AG\perp DC$，$ID=IC$. 又 D、C、E 在⊙A 上.

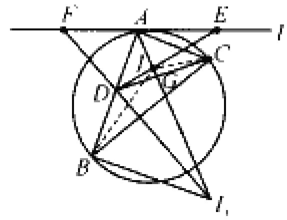


图 2-14

$\angle IAC=\frac{1}{2}\angle DAC=\angle IEC$. A、I、C、E 四点共圆.

$\angle CIE=\angle CAE=\angle ABC$，而 $\angle CIE=2\angle ICD$，$\angle ICD=\frac{1}{2}\angle ABC$.

$\angle AIC=\angle IGC+\angle ICG=90^\circ+\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ACI=\frac{1}{2}\angle ACB$，$I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心.

(2)再证 DF 过 $\triangle ABC$ 的一个旁心.

连 FD 并延长交 $\angle ABC$ 的外角平分线于 I_1，连 BI_1、BI，由(1)知，I 为内心，所以 $\angle IBI_1=90^\circ=\angle EDI_1$，$D$、$B$、$I_1$、$I$ 四点共圆.

因为 $\angle BII_1=\angle BDI_1=90^\circ-\angle ADI=(\frac{1}{2}\angle BAC+\angle ADG)-\angle ADI=\frac{1}{2}\angle BAC+\angle IDG$. 又 A、I、I_1 共线，所以 I_1 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边外的旁心.

同步检测

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC$ 的角平分线和外角平分线分别交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D、E，点 A 关于点 D、E 的对称点分别为 F、G，且 $\triangle ADG$ 和 $\triangle AEF$ 的外接圆交于点 P. 求证：$AP\parallel BC$.

2. 已知一个圆与 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC 相切，也和 $\triangle ABC$ 的外接圆相切于点 T. 若 I 是 $\triangle ABC$ 的内心. 求证：$\angle ATI=\angle CTI$.

3. 如图 2-15，已知 I_A 是与 $\triangle ABC$ 的边 BC 相切的旁切圆的圆心，D 为边 AC 的中点，E 是线段 BC 和 I_AD 的交点，若 $\angle BAC=2\angle ACB$，求证：$AB=BE$.

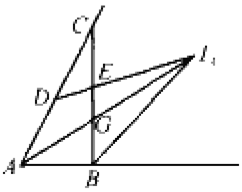


图 2-15

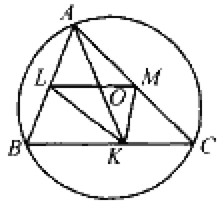


图 2-16

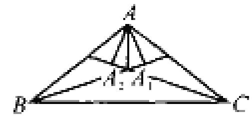


图 2-17

4. 如图 2-16，已知点 O 为锐角$\triangle ABC$ 的外心，直线 AO 与 BC 交于点 K，点 L、M 分别是边 AB、AC 上的点，且有 $KL=KB$，$KM=KC$. 求证：$LM /\!/ BC$.

5. 如图 2-17，已知在$\triangle ABC$ 中，由顶点 A 分别向$\angle B$ 和$\angle C$ 的平分线引垂线，垂足分别为 A_1 和 A_2. 同理，定义 B_1、B_2 和 C_1、C_2. 求证：$2(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)=AB+BC+CA$.

6. 如图 2-18，设 I 为$\triangle ABC$ 的内心，射线 AI、BI、CI 与$\triangle ABC$ 的外接圆分别交于点 D、E、F. 求证：$AD\perp EF$.

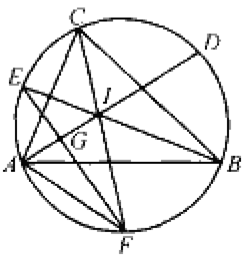


图 2-18

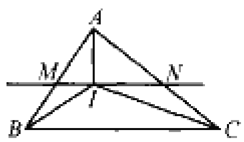


图 2-19

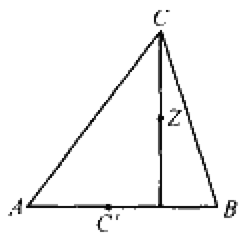


图 2-20

7. 如图 2-19，设 I 是$\triangle ABC$ 的$\angle BAC$ 平分线上的一点，M、N 分别是边 AB、AC 上的点，且使得$\angle ABI=\angle NIC$，$\angle ACI=\angle MIB$. 求证：当且仅当点 M、N、I 共线时，I 是$\triangle ABC$ 的内切圆的圆心.

8. 如图 2-20，已知$\triangle ABC$ 的$\angle C$ 内的旁切圆与边 AB 切于点 C'. 设 Z 为由点 C 引出的$\triangle ABC$ 的高的中点. 求证：$\triangle ABC$ 的内心在直线 $C'Z$ 上.

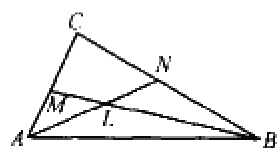


图 2-21

9. 如图 2-21，设 M、N 分别是$\triangle ABC$ 的边 AC、BC 上的点，且$\angle ACB=90°$. 设 AN 与 BM 交于点 L. 求证：$\triangle AML$、$\triangle BNL$ 的垂心与点 C 三点共线.

第2讲 三角形五心间的关系及应用

知识点金

性质1 三角形的外心是外心在各边上射影三角形的垂心.

性质2 三角形的内心和任一顶点的连线与三角形外接圆相交,这个交点与外心的连线是这一顶点所对的边的中垂线.

性质3 三角形的任一顶点到垂心的距离,等于外心到对边的距离的两倍.

性质4 三角形的内心和任一顶点的连线,平分外心、垂心和这一顶点的连线所成的角.

性质5 三角形内心与旁心构成一垂心组;三角形内心与旁心的九点圆是外接圆;三角形的外接圆平分内心与旁心的每一条连线段.

性质6 三角形的外心与垂心的连线的中点是九点圆的圆心.

性质7 三角形的外心O,重心G,九点圆圆心V,垂心H,这四心共线,且$OG:GH=1:2$,$GV:VH=1:3$.

性质8 三角形的面积是其旁心三角形面积与内切圆切点三角形面积的等比中项.

性质9 三角形的旁心三角形与内切圆切点三角形的欧拉线重合.

性质10 设$\triangle ABC$的外心为O,内心为I,则I为旁心$\triangle I_AI_BI_C$的垂心,I关于O的对称点O'是$\triangle I_AI_BI_C$的外心,$\triangle I_AI_BI_C$的欧拉线与直线OI重合.

例题精析

例1 如图2-22,$\triangle ABC$的垂心为H,外心为O,外接圆半径为R,设A、B、C分别关于直线BC、CA、AB的对称点为D、E、F,求证:D、E、F三点共线的充要条件是$OH=2R$.

分析 若$OH=2R$,过A、B、C分别作对边的平行线得$\triangle A''B''C''$,则H为此三角形的外心,且外接圆半径为$2R$,联想到西姆松定理,O在$\triangle A''B''C''$三边上的投影共线的充

要条件是 O 在 $\triangle A''B''C''$ 的外接圆上. 这样,可以通过"位似变换"把 D、E、F 三点与上述投影点对应起来.

证明 设 $\triangle ABC$ 的重心为 G,而 BC、CA、AB 的中点分别为 A'、B'、C',过 A、B、C 分别作 BC、CA、AB 的平分线,其交点分别为 A''、B''、C'',则 $\triangle A''B''C''$ 的重心为 G,外心为 H,设点 O 在直线 $B''C''$、$C''A''$、$A''B''$ 上的投影分别为 D'、E'、F',以 G 为位似中心,$-\frac{1}{2}$ 为位似比作位似变换,将 A、B、C、A''、B''、C'' 分别变换为 A'、B'、C'、A、B、C.

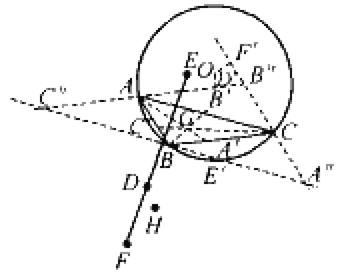


图 2-22

因为 $A'D' \perp BC$,$AD \perp BC$,

所以 $A'D' \parallel AD$,且 $AD : A'D' = 2 : 1 = GA : CA'$,$\angle DAG = \angle D'A'G$,即由 D 变换为 D',同理将 E、F 分别变换为 E'、F'.

因此 D、E、F 三点共线等价于 D'、E'、F' 三点共线.

因 D'、E'、F' 分别是 O 在 $B''C''$、$C''A''$、$A''B''$ 上的投影,由西姆松定理,知 D'、E'、F' 三点共线的充要条件是 O 在 $\triangle A''B''C''$ 的外接圆上,因为 $\triangle A''B''C''$ 的外接圆半径为 $2R$,所以 O 在此圆上的充要条件是 $OH = 2R$.

例 2 在锐角 $\triangle ABC$ 中,外心、重心到同一边的距离分别为 d_1、d_2,则垂心到这边的距离为多少?

解 如图 2-23,O、G 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的外心、重心,BC 边上的高为 AH_1,连结 OG 并延长交 AH_1 于 H,连结 CH 并延长交 AB 于 H_2.过 O 点作 $OO_1 \perp BC$ 于 O_1,$OO_2 \perp AB$ 于 O_2,过 G 作 $GG_1 \perp BC$ 于 G_1,连结 O_1O_2,则有

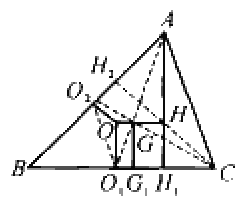


图 2-23

$$O_1O_2 \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}AC,\ \frac{O_1O_2}{AC} = \frac{O_1G}{AG} = \frac{1}{2},\ OO_1 \parallel AH_1.$$

所以 $\frac{O_1O_2}{AC} = \frac{OO_1}{AH}$,$\angle OO_1O_2 = \angle HAC$,所以 $\triangle O_1O_2O \backsim \triangle ACH$,

得 $\angle O_1OO_2 = \angle AHC = \angle H_2HH_1$,$\angle H_1HH_2 + \angle B = \angle O_1OO_2 + \angle B = 180^\circ$.

所以 $\angle BH_2C = 90^\circ$,即 H 为垂心,从而 $\frac{OG}{GH} = \frac{O_1G}{GA} = \frac{1}{2}$.

在梯形 OO_1H_1H 中,则有 $GG_1 = \frac{1 \cdot H_1H + 2OO_1}{1+2} = \frac{H_1H + 2OO_1}{3}$.

所以 $HH_1 = 3GG_1 - 2OO_1 = 3d_2 - 2d_1$.

说明 本题 O、G、H 三点共线,是欧拉线.

例 3 如图 2-24,$\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于 D,I 是 $\triangle ABC$ 的内心,M 是边 BC 的中点,P 是 I 关于 M 的对称点(设 P 点在圆内),延长 DP 与外接圆

相交于点 N. 试证：在 AN、BN、CN 三条线段中，必有一条线段是另两条线段之和.

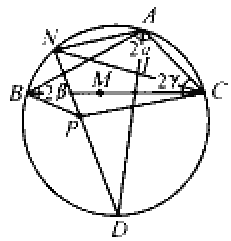


图 2-24

证明 设$\triangle ABC$ 的边分别为 a、b、c，角为 2α、2β、2γ，$\angle NCB=\theta$，易知$\angle PCB=\beta$，$\angle PBC=\gamma$，$\angle PNB=\alpha$，

$\angle PNB=2\beta+\gamma+\angle NBA=2\beta+\gamma+\angle ACN=2\beta+\gamma+2\gamma-\theta=2\beta+3\gamma-\theta$.

由正弦定理，得 $PN=\dfrac{PB}{\sin\alpha}\sin(2\beta+3\gamma-\theta)=\dfrac{PC}{\sin\alpha}\sin(\beta+\theta)$.

又 $PB=\dfrac{a}{\sin\angle BPC}\sin\beta$，$PC=\dfrac{a}{\sin\angle BPC}\sin\gamma$.

故 $\sin\beta\sin(2\beta+3\gamma-\theta)=\sin\gamma\sin(\beta+\theta)$，

即 $\cos(3\beta+3\gamma-\theta)-\cos(\beta+3\gamma-\theta)=\cos(\beta+\gamma+\theta)-\cos(\beta-\gamma+\theta)$. 移项，再和差化积，得

$\sin(2\beta-2\gamma)\sin(\beta+\gamma-\theta)=\sin(\beta+\gamma)\sin(2\gamma-\theta)$，

即 $\sin2\alpha\cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha\sin(2\gamma-\theta)$，

化得 $\sin(2\alpha+\theta)-\sin\alpha=\sin(2\gamma-\theta)$.

由正弦定理，上式即 $NC-NB=NA$，即 $NC=NA+NB$，证毕.

例 4 $\triangle ABC$ 的边 $AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，内心是 I，外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的平分线分别交 BC、CA、AB 于 D、E、F，则边角关系有如下性质：

(1) $\dfrac{IA}{\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}=\dfrac{IB}{\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A}{2}}=\dfrac{IC}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}$；

(2) $ID=\dfrac{r}{\cos\dfrac{B-C}{2}}$，$IE=\dfrac{r}{\cos\dfrac{C-A}{2}}$，$IF=\dfrac{r}{\cos\dfrac{A-B}{2}}$；

(3) $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

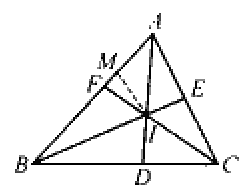


图 2-25

证明 先证(3)，如图 2-25，作 $IM\perp AB$ 于 M，则 $IM=IA\sin\dfrac{A}{2}$，由三角形面积公式及正弦定理，得 $\dfrac{1}{2}r(a+b+c)=2R^2\sin A\sin B\sin C$，且 $a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C)=8R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$，所以 $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

因为 $IA=\dfrac{IM}{\sin\frac{A}{2}}=4R\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$，所以$\dfrac{IA}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=4R$.

同理$\dfrac{IB}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}=\dfrac{IC}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}=4R$，即结论(1)成立.

由角平分线的性质得$\dfrac{ID}{IA}=\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{BC}{BA+AC}$.

所以 $ID=\dfrac{\sin A}{\sin B+\sin C}\cdot 4R\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{\cos\frac{B-C}{2}}$.

同理 $IE=\dfrac{r}{\cos\frac{C-A}{2}}$，$IF=\dfrac{r}{\cos\frac{A-B}{2}}$，即结论(2)成立.

说明　利用上述结论可证明下题：

在△ABC 中，∠C 的平分线交边 AB 及△ABC 外接圆于 D、K，I 是△ABC 的内心，求证：

(1)$\dfrac{1}{ID}-\dfrac{1}{IK}=\dfrac{1}{IC}$；

(2)$\dfrac{IC}{ID}-\dfrac{ID}{DK}=1$.

证明　(1)易知 $IK=AK=2R\sin\dfrac{C}{2}$，由上述性质(1)(2)，得

$$\frac{IC}{ID}-\frac{IC}{IK}=\frac{IC}{ID}-\frac{IC}{AK}=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{r}-\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{2R\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=1.$$

所以$\dfrac{1}{ID}-\dfrac{1}{IK}=\dfrac{1}{IC}$.

(2)$\dfrac{IC}{ID}-\dfrac{ID}{DK}=\dfrac{IC}{ID}-\dfrac{ID}{IK-ID}$

$$=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}-\frac{r}{2R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-r}$$

$$=\frac{\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=1$$，即等式成立.

例 5 如图 2-26，$\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 分别在 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边 B_1C_1、C_1A_1、A_1B_1 上，使得 $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$，$\angle BCA=\angle B_1C_1A_1$，$\angle CAB=\angle C_1A_1B_1$. 求证：$\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心与 $\triangle ABC$ 的外心一样远.

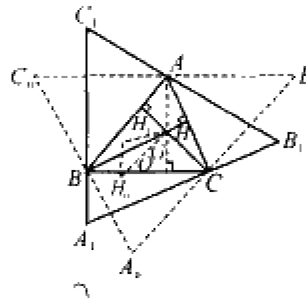


图 2-26

分析 设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，由条件可得 H 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外心. 作 $\triangle A_0B_0C_0$，使 A、B、C 为其各边中点，则知 H 也为 $\triangle A_0B_0C_0$ 的外心，可知 $\triangle A_0B_0C_0$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 相似，利用"位似旋转变换"，两三角形的垂心通过此变换对应起来，且有 $\angle H_0H_1H=90^\circ$，另外 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_0B_0C_0$ 的垂心均为 G，利用"位似变换"及"欧拉线"可推知 $\triangle ABC$ 的外心 O 为 HH_0 的中点，从而在 $\mathrm{Rt}\triangle H_1HH_0$ 中，$OH=OH_1$.

证明 设 $\triangle ABC$ 的垂心是 H，则 $\angle BHC=180^\circ-\angle CAB=180^\circ-\angle C_1A_1B_1$，$H$、$B$、$A_1$、$C$ 四点共圆.

同理 H、C、B_1、A 四点共圆；

H、A、C_1、B 也四点共圆.

所以
$$\begin{aligned}\angle B_1HC_1&=\angle B_1HA+\angle C_1HA\\&=\angle B_1CA+\angle C_1BA\\&=(180^\circ-\angle A_1B_1C_1-\angle CAB_1)+(180^\circ-\angle A_1C_1B_1-\angle C_1AB)\\&=(180^\circ-\angle A_1B_1C_1-\angle A_1C_1B_1)+(180^\circ-\angle CAB_1-\angle C_1AB)\\&=2\angle B_1A_1C_1,\end{aligned}$$

同理 $\angle C_1HA_1=2\angle C_1B_1A_1$，$\angle A_1HB_1=2\angle A_1C_1B_1$，

所以 H 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外心.

分别过 $\triangle ABC$ 的顶点作对边的平行线得 $\triangle A_0B_0C_0$，易知 H 也是 $\triangle A_0B_0C_0$ 的外心.

由 $\angle A_1=\angle A=\angle A_0$，知 A_1 在以 AEH 为直径的圆上.

设 H_0、H_1 分别是 $\triangle A_0B_0C_0$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心.

以 H 为位似中心作位似旋转变换，使 $\angle A_1B_1C_1$ 变到 $\triangle A_0B_0C_0$，则 $\angle HH_1H_0=\angle HA_1A_0=90^\circ$.

设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，重心为 G，由欧拉线，有 $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GO}$.

以 G 为位似中心，-2 为位似比作位似变换，则 $\triangle ABC$ 变为 $\triangle A_0B_0C_0$. 故有 $\overrightarrow{GH_0}=-2\overrightarrow{GH}$.

从而 $\overrightarrow{OH_0}=-\overrightarrow{OH}$，即 O 为 H_0H 中点.

在 $\mathrm{Rt}\triangle H_0H_1H$ 中，O 为斜边 H_0H 的中点，

故 $H_1O=HO$，

即 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心与 $\triangle ABC$ 的外心一样远.

例 6 如图 2-27，O、I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心，AD 是 BC 边上的高，I 在线段 OD 上，$AB\neq AC$，求证：$\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 BC 边上的旁切圆半径.

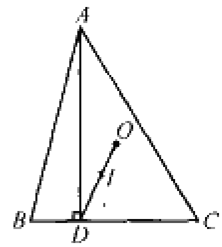


图 2-27

分析 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的旁切圆是与边 AB、AC 的延长线以及边 BC 都相切的圆.

证法 1 如图 2-28 所示，记 $AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，设 AI 的延长线交 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 于 K 点，则 OK 是 $\odot O$ 的半径，记为 R. 因为 $OK\perp BC$，所以 $OK/\!/AD$.

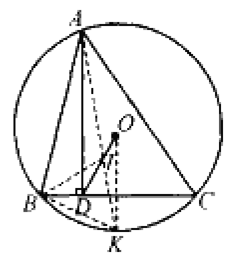


图 2-28

所以 $\dfrac{AI}{IK}=\dfrac{AD}{OK}=\dfrac{c\cdot\sin B}{R}=2\sin B\cdot\sin C$， ①

又 $\angle ABI=\angle IBC=\dfrac{1}{2}\angle B$，$\angle CBK=\angle CAK=\dfrac{1}{2}\angle A$，

$\angle AKB=\angle ACB=\angle C$，$\angle BAK=\dfrac{1}{2}\angle A$，

$$\text{所以}\quad \frac{AI}{IK}=\frac{S_{\triangle ABI}}{S_{\triangle KBI}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot BI\cdot\sin\frac{B}{2}}{\frac{1}{2}BK\cdot BI\cdot\sin\frac{A+B}{2}}$$

$$=\frac{AB}{BK}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin C}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}, \qquad ②$$

由①、②得

$$2\sin B\cdot\sin C=\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},$$

所以 $4\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=1$，

设 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的旁切圆半径为 r_a，则

$\dfrac{1}{2}bc\cdot\sin A=S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}r_a(b+c-a)$，

所以 $r_a=\dfrac{bc\cdot\sin A}{b+c-a}$

$$=2R\cdot\frac{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{\sin B+\sin C-\sin A}$$

$$=2R\cdot\frac{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin\frac{C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}$$

$$=R\cdot\frac{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{\sin\frac{B+C}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=R. \qquad ③$$

即$\triangle ABC$的外接圆半径等于BC边上旁切圆的半径.

评注 上述解答是由命题组给出,其证法是采用几何与三角恒等变换相结合的方法,解答要用三角函数和差化积,显得复杂一些.那么不用三角函数和差化积,那还有没有较简单一点的方法呢?答案是肯定的.

证法 2 如图 2-29,BC边的旁切圆半径为R_A,圆心为I_A,K为AI与外接圆交点,显然,A、I、K、I_A共线,且K为点B、I、C、I_A外接圆圆心.

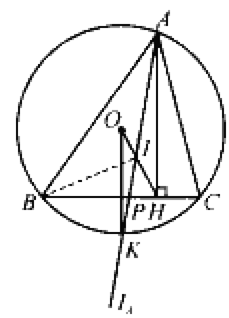


图 2-29

因为$R=OK$,所以$\frac{R}{AH}=\frac{KI}{IA}$,$\frac{R_A}{AH}=\frac{I_AP}{PA}$.

所以要证$R=R_A\Leftrightarrow\frac{KI}{IA}=\frac{I_AP}{PA}$.

因为$I_AP=I_AK+KP=IK+KP$,$PA=PI+IA$,

所以$\frac{KI}{IA}=\frac{IK+KP}{PI+IA}\Leftrightarrow KI\cdot PI=IA\cdot KP\Leftrightarrow\frac{PI}{PK}=\frac{AI}{IK}$.

因为$\frac{PI}{PK}=\frac{BI\cdot\sin\frac{B}{2}}{BK\cdot\sin\frac{A}{2}}$,$\frac{AI}{IK}=\frac{S_{\triangle ABI}}{S_{\triangle KBI}}=\frac{AB\cdot\sin\frac{B}{2}}{BK\cdot\sin\frac{A+B}{2}}$,

故 $\frac{BI}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{AB}{\sin\frac{A+B}{2}}$.

在$\triangle ABC$中应用正弦定理即可.

评注 不少读者问:有没有纯几何的简单证法?答案是肯定的.

分析 如图 2-30,画$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$,延长AI交BC于J,交$\overset{\frown}{BC}$于K,则K为$\overset{\frown}{BC}$中点,显然$OK\perp BC$.

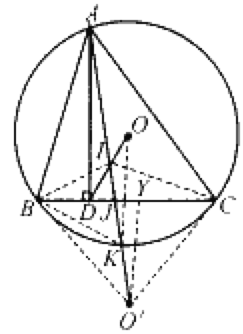


图 2-30

设 O' 是与 BC 边相切的 $\triangle ABC$ 的旁切圆圆心，则 O' 在 AI 延长线上，即 A、I、J、K、O' 共线.

作 $O'Y\perp BC$ 于 Y，则 $O'Y$ 是旁切圆 $\odot O'$ 的半径.

要证 $\odot O$ 半径 R 等于 $\odot O'$ 半径 r_a，即要证 $OK=O'Y$，注意到 $OK\parallel O'Y$，也就是 OK 经过平移可以与 YO' 重合.

其实，这个平移是由两次位似变换合成的：第一次 OK 经过以 I 为位似心，$\frac{IA}{IK}$ 为位似比的位似变换变为 DA；第二次 DA 经过以 J 为位似心，$\frac{JO'}{JA}$ 为位似比的位似变换变为 YO'. 要证这两次位似变换的复合作用是个平移，只须证两个位似比的乘积是 1 就可以了.

也就是证明：$\frac{IA}{IK}\cdot\frac{JO'}{JA}=1$ 或者证明 $\frac{IA}{IK}=\frac{JA}{JO'}$ 即可. 而要证明 $\frac{IA}{IK}=\frac{JA}{JO'}$，只需证 $\frac{IA}{IA+IK}=\frac{JA}{JA+JO'}$，即 $\frac{IA}{AK}=\frac{JA}{AO'}$ 即可.

这样，我们用位似变换的思想，分析出了证明的思路，下面即可整理出证明过程.

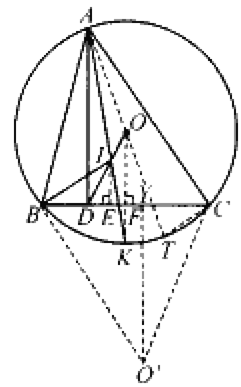


图 2-31

证法 3　如图 2-31，因为 AD、OK、$O'Y$ 都垂直于 BC，

所以 $AD\parallel OK\parallel O'Y$，

因此　$\triangle AID\backsim\triangle KIO$，

$BE=\frac{a+c-b}{2}$，$BF=\frac{a}{2}$，

$BD=c\cdot\cos B$，$\frac{DE}{EF}=\frac{a+c-b-2c\cdot\cos B}{b-c}$，

由 $\angle B=\angle ATC$，得 $\angle BAD=\angle TAC$，

所以　$\angle DAI=\angle OAI$，

利用 $\triangle ADO$ 中，AI 平分 $\angle DAO$ 可得

$\frac{AD}{AO}=\frac{DI}{IO}=\frac{DE}{EF}$，

设 $\triangle ABC$ 面积为 S，则 $AD=\frac{2S}{a}$ 代入得

$$\frac{\frac{2S}{a}}{\frac{a}{R}}=\frac{a+c-b-2c\cdot\cos B}{b-c}.\qquad ⑦$$

因为 $a^2-2ac\cos B=a^2-(a^2+c^2-b^2)=(b-c)(b+c)=(b-c)\cdot(2p-a)$，

所以 $\frac{2p-a}{a}=\frac{a-2c\cdot\cos B}{b-c}$.

因此 $\frac{2p-2a}{a}=\frac{a+c-b-2c\cdot\cos B}{b-c}\overset{\text{根据⑦}}{=\!=}\frac{2S}{aR}$，

所以 $(p-a)R=rp$（r 为 $\triangle ABC$ 内切圆半径）． ⑧

另外，由图 2-32 得

由 $\triangle AIT_1\backsim\triangle AO'T_2$ 得 $\frac{r}{r_a}=\frac{AT_1}{AT_2}$，

但 $AT_1=p-a$，$AT_2=p$，

所以 $\frac{r}{r_a}=\frac{p-a}{p}$，

即 $(p-a)r_a=rp$． ⑨

比较⑧、⑨即可得证 $R=r_a$．

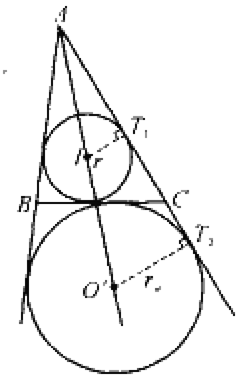


图 2-32

评注 回顾证法三的过程，整个证明包括两大部分：

(1) $\triangle ABC$ 中，I 为内心，O' 为与 BC 边相切的旁切圆圆心，AO' 交 BC 于 J，交⊙O 于 K，则 $\frac{AI}{AK}=\frac{AJ}{AO}$

这是对任意 $\triangle ABC$ 都成立的一般性质．

(2) 当 $\triangle ABC$ 的外心 O、内心 I 与高 AD 的垂足共线时，$\triangle ADI\backsim\triangle KOI$，因此，$\frac{AD}{R}=\frac{AI}{IK}$，进而有 $\frac{AD}{AD+R}=\frac{AI}{AK}$．

这是只有 O、I、D 共线时且 O 不在 AD 上时才生出的特殊性质，容易看出，如果 O 在 AD 上时，将有 $AB=AC$，这时，$\triangle ADI$ 与 $\triangle KOI$ 退化为线段，其确定的比例关系也会消失．如图 2-33，$AB=AC$，A、O、I、D、O' 共线，明显的有 $R\neq r_a$．

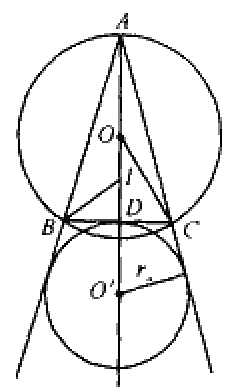


图 2-33

因此问题可一般叙述为：

"O、I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心，AD 是 BC 边上的高，I 在线段 OD 上，如果 $AB\neq AC$，则 $\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 BC 边上旁切圆的半径．"

其逆命题可如下表述：

"$\triangle ABC$ 中，$AB\neq AC$，O 是外心，I 是内心，AD 是 BC 边上的高．如果 $\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 BC 边上旁切圆半径，则 I 在线段 OD 上．"

其证明思路如下：

因为 $AB\neq AC$，所以外心 O 不在高 AD 上（如图 2-34）．

连接 OD 交 AO' 于 I'，则由 $\triangle ADI'\backsim\triangle KOI'$，$\triangle ADJ\backsim\triangle O'YJ$

得 $\frac{AI'}{I'K}=\frac{AD}{R}=\frac{AD}{r_a}=\frac{AJ}{JO'}$，

所以$\frac{AI'}{AI'+I'K}=\frac{AJ}{AJ+JO'}$.

即 $\frac{AI'}{AK}=\frac{AJ}{AO'}$. ⑩

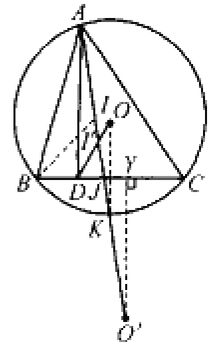


图 2-34

若 I 是$\triangle ABC$ 的内心，则 A、I、J、K、O'共线，根据前述$\triangle ABC$ 的一般性质(1)，有：$\frac{AI}{AK}=\frac{AJ}{AO'}$， ⑪

对照⑩、⑪得 $AI'=AI$.

所以 I 与 I'重合，即 D、I、O 共线.

例 7 在直角三角形 ABC 中，AD 是斜边 BC 上的高，连接$\triangle ABD$ 与$\triangle ACD$ 的内心的直线分别交 AB、AC 于 K、L，$\triangle ABC$ 和$\triangle AKL$ 的面积分别记为 S 和 T，求证：$S\geqslant 2T$.

证明 如图 2-35，将$\triangle ABD$ 和$\triangle ACD$ 的内心分别记为 M、N，由于$\triangle ABD\backsim\triangle CAD$，故有对应线段之比等于相似比，即

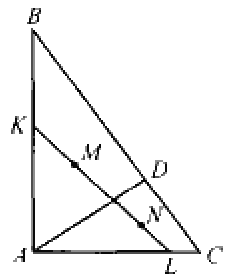


图 2-35

$DM : DN=BD : AD$.

又 $\angle MDN=\angle BAC=90°$，

故有 $\triangle ABD\backsim\triangle NMD$，

从而对应边的交角相等，即

$\angle LKA=\angle BDM=45°$，

这表明，$\triangle ALK$ 是等腰直角三角形.

又因为$\triangle ALK\cong\triangle AMD$，

所以 $AK=AD=AL$.

于是得面积

$$2T=AK\cdot AL=AD^2=\frac{AB^2\cdot AC^2}{AB^2+AC^2}\leqslant\frac{AB^2\cdot AC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=S$$

评注 本例是一道平面几何内心的问题，如果把$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内心 M、N 都变成其旁心，就演变成为下面的问题. 其证明的关键是利用垂心.

演变题 如图 2-36，在 Rt$\triangle ABC$ 中，AD 是斜边 BC 上的高，$\triangle ABD$ 中 AB 边的旁心为 M，$\triangle ACD$ 的旁心为 N，直线 MN 分别交 BA、CA 的延长线于 K、L，$\triangle ABC$、$\triangle AKL$ 的面积分别记为 S、T，求证：$S\geqslant 2T$.

证明 如图 2-36，添加辅助线，因 M、N 分别为$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的旁心，所以 BH、CH 分别为$\angle ABC$、$\angle ACB$ 的外角平分线，H 为$\triangle ABC$ 的旁心.

由$\angle BAD=\angle ACD$ 得$\angle BAE=\angle ACF$，故$\angle BAM=\angle ACN$，从而$\angle MAD=\angle PCD$，A、P、C、D 四点共圆，$\angle APC=180°-\angle ADC=90°$，$AP\perp PC$ 即 $MP\perp NH$.

同理可证 $NQ\perp MH$，因此 A 为 $\triangle MNH$ 的垂心，$HA\perp MN$，即 $HA\perp LK$，又 $\angle LAG=\angle CAH$，所以 $\angle LAG=\angle KAG=45°$，进而 $\angle ALK=45°$，$AK=AL$，另一方面，$\triangle ALN\cong\triangle ADN$，有 $AL=AD$，$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC$.

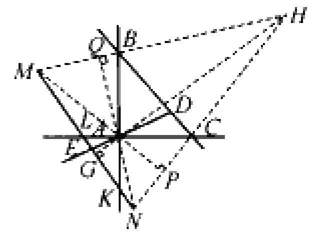


图 2-36

因为 $T=\frac{1}{2}AK\cdot AL=\frac{1}{2}AD^2=\frac{AB^2\cdot AC^2}{2(AB^2+AC^2)}$，

所以 $\frac{S}{2T}=\frac{AB^2+AC^2}{2AB\cdot AC}\geqslant 1$ 即 $S\geqslant 2T$.

例 8 如图 2-37，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=30°$，$\angle ABC=50°$，M 为形内一点，$\angle MAC=40°$，$\angle MCB=20°$. 求 $\angle MBC$ 的度数.

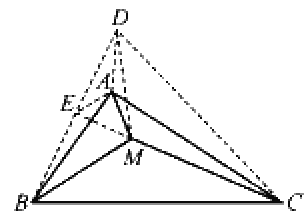


图 2-37

解 在 CM 的延长线上取一点 E，使 $\angle EBC=60°$，在 BE 的延长线上取一点 D，使 $\angle DCB=40°$，连 DA、DM、DC、EA. 易知 $CA\perp DB$，$BA\perp DC$，即 A 为 $\triangle BCD$ 的垂心，可知 $\angle ADB=30°$.

在 $\triangle CDE$ 中，易知 $\angle ECD=20°$，$\angle BDC=80°$，可知 $\angle DEC=80°=\angle EDC$. 又 $EC=DC$，且 AC 为 $\angle DCE$ 的平分线，即 AC 为 DE 的中垂线，从而 $AD=AE$，$\angle AED=30°$，$\angle AEM=50°$. 又 $\angle AME=\angle MAC+\angle MCA=50°$，故 $AM=AE=AD$，即 A 为 $\triangle DEM$ 的外心，于是 $\angle MDE=\frac{1}{2}\angle MAE=40°$.

由 $\angle BDC=80°$，可知 DM 平分 $\angle BDC$. 又 CM 平分 $\angle BCD$，知 M 为 $\triangle BCD$ 的内心，故 $\angle MBC=\frac{1}{2}\angle DBC=30°$.

例 9 设点 M 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的任一内点，r_1、r_2、r 分别是 $\triangle AMC$、$\triangle BMC$、$\triangle ABC$ 的内切圆半径；q_1、q_2、q 分别是这些三角形在 $\angle ACM$、$\angle BCM$、$\angle ACB$ 内的旁切圆半径. 试证：$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\frac{r}{q}$.

证明 设 $\angle CAB=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle BCA=\gamma$，$\angle AMC=\delta$；

又设 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心为 R，且与 AB 切于 P（如图 2-38），于是

$\angle APR=\angle BPR=\angle\frac{\pi}{2}$，

从而有

$$AB=r\cot\frac{\alpha}{2}+r\cot\frac{\beta}{2}=r\left(\cot\frac{\alpha}{2}-\cot\frac{\beta}{2}\right). \quad ①$$

由于三角形的角的内、外角平分线互相垂直，因而类似地有

$$AB=q\tan\frac{\alpha}{2}+q\tan\frac{\beta}{2}=q\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\right).$$ ②

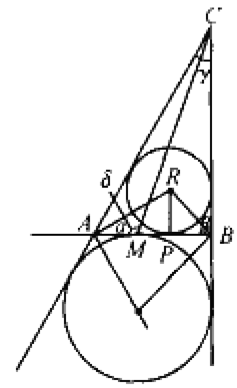


图 2-38

由①和②可得

$$\frac{r}{q}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}.$$ ③

类似的结论对于$\triangle AMC$和$\triangle BMC$也成立，故有

$$\frac{r_1}{q_1}=\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\delta}{2},$$ ④

和$\frac{r_2}{q_2}=\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\pi-\delta}{2}=\tan\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\delta}{2}.$ ⑤

将④、⑤相乘，并利用③得

$$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\delta}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\delta}{2}=\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{q}.$$

例 10 I为$\triangle ABC$内一点，试证：I为$\triangle ABC$内心的充要条件是$\triangle IBC$、$\triangle ICA$、$\triangle IAB$的外心均在$\triangle ABC$的外接圆上.

证明 必要性：（如图 2-39）设I为$\triangle ABC$内心，AI、BI、CI的延长线分别交$\triangle ABC$的外接圆于A_1、B_1、C_1，连接A_1B、A_1C.

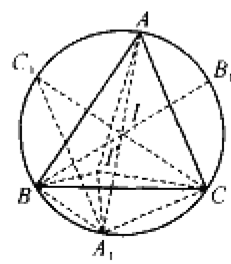


图 2-39

在$\triangle A_1BI$中，$\angle A_1IB=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$，$\angle A_1BI=\angle A_1BC+\angle\frac{B}{2}=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$，故$A_1B=A_1I$.

同理，在$\triangle A_1CI$中，$A_1I=A_1C$.

于是 $A_1B=A_1I=A_1C$，

因此，A_1是$\triangle IBC$的外心. 同理，B_1、C_1分别是$\triangle ICA$、$\triangle IAB$的外心. 即$\triangle IBC$、$\triangle ICA$、$\triangle IAB$的外心均在$\triangle ABC$的外接圆上.

充分性：（如图）设I'为$\triangle ABC$内一点，$\triangle I'BC$、$\triangle I'CA$、$\triangle I'AB$的外心A_2、B_2、C_2均在$\triangle ABC$的外接圆上，由$A_2B=A_2C$，$A_1B=A_1C$，知A_2、A_1重合. 同理，B_2、B_1重合，C_2、C_1重合.

由A_1、C_1分别是$\triangle IBC$、$\triangle IAB$的外心，知A_1C_1垂直平分线段BI. 则$A_1(A_2)$、$C_1(C_2)$分别是$\triangle I'BC$、$\triangle I'AB$的外心，知A_1C_1垂直平分线段BI'. 由此可知I'和I重合，即I'为$\triangle ABC$内心.

评注 由上述证明可得如下结论：

设I'为$\triangle ABC$内一点，若$\triangle I'BC$、$\triangle I'CA$、$\triangle I'AB$中有两个三角形外心在$\triangle ABC$

的外接圆上，则另一三角形的外心也在$\triangle ABC$的外接圆上.

思考交流

思考题1 如图2-40，已知$\triangle ABC$内一点P，设D、E、F分别为点P在边BC、CA、AB上的投影，假设$AP^2+PD^2=BP^2+PE^2=CP^2+PF^2$，且三角形$ABC$的三个旁心分别为$I_A$、$I_B$、$I_C$. 求证：$P$是$\triangle I_AI_BI_C$的外心.

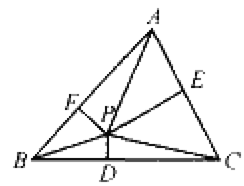


图 2-40

证明 由已知条件可得$BF^2-CE^2=(BP^2-PF^2)-(CP^2-PE^2)=(BP^2+PE^2)-(CP^2+PF^2)=0$，

所以$BF=CE$. 设$x=BF=CE$，

同理可设 $y=CD=AF$，$z=AE=BD$.

若D、E、F中有一个点在三边的延长线上，如点D在BC的延长线上，则有

$AB+BC=x+y+(z-y)=x+z=AC$，矛盾.

所以D、E、F三个点都在$\triangle ABC$的三边上.

设$a=BC$，$b=CA$，$c=AB$，$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，则$x=p-a$，$y=p-b$，$z=p-c$.

因为$BD=p-c$，$CD=p-b$，所以D是$\triangle ABC$中$\angle BAC$内的旁切圆与边BC的切点.

同理，E、F分别为$\angle ABC$、$\angle ACB$内的旁切圆与边CA、AB的切点.

因为PD和I_AD均垂直于BC，所以P、D、I_A三点共线.

同理，P、E、I_B和P、F、I_C均三点共线，且$\angle PI_AC=\dfrac{\angle ACB}{2}=\angle PI_BC$，所以$PI_A=PI_C$.

同理，$PI_A=PI_B$.

所以$PI_A=PI_B=PI_C$，所以P是$\triangle I_AI_BI_C$的内心.

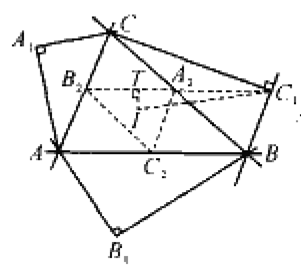


图 2-41

思考题2 如图2-41，已知$\triangle ABC$的$\angle ACB$、$\angle BAC$、$\angle ABC$的外角平分线分别为A_1C、B_1A、C_1B，点A、B、C在A_1C、B_1A、C_1B上的投影分别为A_1、B_1、C_1. 若d是$\triangle A_1B_1C_1$外接圆的直径，r和p分别为$\triangle ABC$的内切圆半径和半周长，求证：$r^2+p^2=d^2$.

证明 设$\triangle ABC$三边中点分别为A_2、B_2、C_2，则$\angle BC_1A_2=\angle A_2BC_1=90°-\dfrac{\angle B}{2}$，$\angle BA_2C_1=\angle B$.

又$\angle B_2A_2C=\angle B$，所以，B_2、A_2、C_1 三点共线.

设$\triangle A_2B_2C_2$ 的内切圆$\odot I$ 与边 A_2B_2 相切于点 T，则

$$TC_1=TA_2+A_2C=\frac{1}{2}(p-a)+\frac{a}{2}=\frac{p}{2}.$$

所以，$IC_1^2=IT^2+TC_1^2=(\frac{r}{2})^2+(\frac{p}{2})^2$.

同理可得，$IA_1^2=IB_1^2=(\frac{r}{2})^2+(\frac{p}{2})^2$.

故 I 是$\triangle A_1B_1C_1$ 的外心，$IA_1=IB_1=IC_1=\frac{d}{2}$. 从而，$d^2=r^2+p^2$.

同步检测

1. 如图 2-42，I 是$\triangle ABC$ 的内心，I 关于边 BC、CA、AB 的对称点分别为 A'、B'、C'. 证明：若$\triangle A'B'C'$的外接圆过点 B，则$\angle ABC=60°$.

2. 如图 2-43，已知锐角$\triangle ABC$ 的内切圆$\odot I$ 与边 BC 切于点 K，AD 是$\triangle ABC$ 的高，M 是 AD 的中点. 如果 N 是$\odot I$ 与 KM 的交点，求证：$\odot I$ 与$\triangle BCN$ 的外接圆相切于点 N.

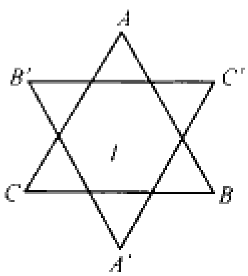


图 2-42

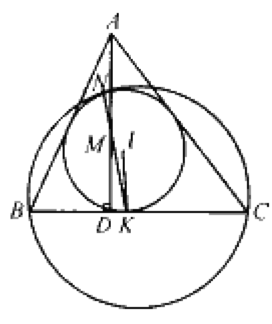


图 2-43

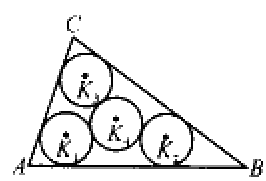


图 2-44

3. 如图 2-44，在$\triangle ABC$ 的内部有四个半径相等的$\odot K_1$、$\odot K_2$、$\odot K_3$、$\odot K_4$，其中$\odot K_1$、$\odot K_2$、$\odot K_3$ 均与$\triangle ABC$ 的两条边相切，且与$\odot K_4$ 外切. 试证：$\triangle ABC$ 的内心，外心和 K_4 在一条直线上.

4. 在$\triangle ABC$ 的外接圆上，$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$的中点分别为 D、E、F，其中 $A\notin\overset{\frown}{BC}$、$B\notin\overset{\frown}{CA}$，$C\notin\overset{\frown}{AB}$. DE 分别交 CB、CA 于点 G、H，DF 分别交 BC、BA 于点 I、J，GH 和 IJ 的中点分别为 M、N. (1)用$\triangle ABC$ 的内角表示$\triangle DMN$ 的三个内角；(2)若 O 为$\triangle DMN$ 的外心，P

是 AD 与 EF 的交点，求证：O、M、P、N 四点共圆.

5. 在具有单位面积的等边△ABC 外作△APB、△BQC、△CRA，使得∠P、∠Q、∠R 均等于 60°.（1）求△PQR 的最大面积；（2）求顶点是△APB、△BQC、△CRA 的内心的三角形的最大面积.

6. 等腰三角形 ABC 中，$BC=AC$，O 是它的外心，I 是它的内心. 点 D 在 BC 边上，且 $OD\perp BI$. 求证：$ID/\!/AC$.

7. M、N 分别是△ABC 的边 AC、BC 上的点，K 是线段 MN 的中点，△CAN 和△BCM 的外接圆的第二个交点为 D. 试证：CD 经过△ABC 的外心的充要条件是 AB 的中垂线经过点 K.

8. 如图 2-45，I 是△ABC 的内心，且⊙I 与 AB、BC 分别切于点 X、Y. XI 与⊙I 交于另一点 T，X' 是 AB、CT 的交点. L 在线段 $X'C$ 上，且 $X'L=CT$. 试证：当且仅当 A、L、Y 三点共线时 $AB=AC$.

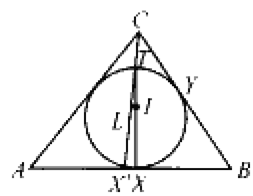


图 2-45

9. 已知△ABC 的内切圆⊙I 与边 AB、AC 分别切于点 P、Q，BI、CI 分别交 PQ 于 K、L. 求证：△ILK 的外接圆与△ABC 的内切圆相切的充要条件是 $AB+AC=3BC$.

10. 已知平面上三定点 A、B、C，设动点 D 满足 A、B、C、D 共圆. I_A、I_B、I_C、I_D 分别是点 A、B、C、D 关于△BCD、△ACD、△ABD、△ABC 的西姆松线. 当点 D 移动时，求直线 I_A、I_B、I_C、I_D 的交点轨迹.

第三章 与圆有关的重要问题

第1讲 圆幂和根轴

知识点金

圆幂定理是指圆中一些线段的比例性质，即圆中的比例线段定理，如相交弦定理，切割线定理等，这些是平面几何中研究有关圆的性质的一组很重要的定理.

首先我们有幂的定义：从一点 A 作一圆周的任一割线，从 A 起到和圆周相交为止的两线段之积，称为点对于这圆周的幂.

若 A 点在圆外，A 点的幂等于从 A 点所引圆周切线的平方，由相交弦定理及割线定理，知道点 A 的幂为定值；若这点在圆内，则这点的幂等于以该点为中点的弦的半弦长的平方；若这点在圆周上，则这点的幂等于 0.

不难证明，幂有下列三个性质：

(1)两圆周相交，交点处的切线成直角，则每一圆半径的平方等于它的圆心对于另一圆周的幂，反之亦然.

(2)点 A 对于以 O 为圆心的圆周的幂，等于 OA 及其半径的平方差.

(3)对于两已知圆有等幂的点的轨迹，是一条垂直于连心线的直线.

如图 3-1，设点 M 到$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的幂相等，则

$MO_1^2-R_1^2=MO_2^2-R_2^2$，

即 $MO_1^2-MO_2^2=R_1^2-R_2^2=$常数，其中 R_1、R_2 分别为$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的半径. 设 O_1O_2 的中点为 D，$MH\perp O_1O_2$，不难得到

$MO_1^2-MO_2^2=2O_1O_2\cdot DH-R_1^2-R_2^2$，

所以 $DH=\dfrac{R_1^2-R_2^2}{2O_1O_2}=$常数.

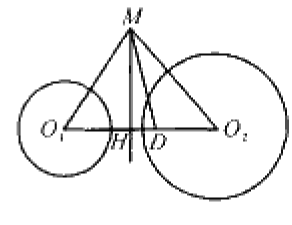


图 3-1

所以，H 点是一定点，过 H 的垂线即是两圆等幂点的轨迹. 这条直线称为两圆的根轴或等幂轴.

由此可以看出：

①若两圆同心，则 $O_1O_2=0$，所以，同心圆的根轴不存在；

②若 $R_2=0$，圆 O_2 缩成一点 O_2，这时 M 点对圆 O_2 的幂即是 MO_2^2，上面的论述均成立. 这时，直线（轨迹）称为一圆与一定点的根轴.

根轴有如下性质：

性质 1　若两圆相交，其根轴就是公共弦所在的直线.

由于两圆的交点对于两圆的幂都是 0，所以，它们位于根轴上，而根轴是直线，所以，根轴是两交点的连线.

性质 2　若两圆相切，其根轴就是过两圆切点的公切线.

性质 3　若三个圆两两不同心，则其两两的根轴相交于一点，或互相平行.

若这三条根轴中有两条相交，则这一交点对于三个圆的幂均相等，所以必在第三条根轴上. 这一点，称为三圆的根心.

显然，当三个圆的圆心在一条直线上时，三条根轴互相平行.

当三个圆的圆心不共线时，根心存在.

性质 4　若两圆相离，则两圆的四条公切线的中点在根轴上.

例题精析

例 1　如图 3-2，在线段 AB 的同一侧作出三个相似的$\triangle PAB$、$\triangle AQB$、$\triangle ABR$，再关于 AB 的垂直平分线对称地作出三个相似三角形 $P'AB$、$AQ'B$、ABR'，求证：P、Q、R、P'、Q'、R'在同一个圆上.

证明　因为$\triangle PAB\backsim\triangle AQB$，所以$\angle PBA=\angle ABQ$，所以 Q 点在 PB 上，且$\dfrac{PB}{AB}=\dfrac{AB}{QB}$. 因为$\triangle AQB\backsim\triangle ABR$，所以$\angle BAQ=\angle RAB$，所以 R 点在 AQ 上，且$\dfrac{AQ}{AB}=\dfrac{AB}{AR}$. 于是，$PB\cdot QB=AB^2=AQ\cdot AR$.

设$\triangle PQR$的外接圆的圆心为O，则A、B关于$\odot O$是等幂的.作切线AT、BS，连结OA、OB、OT、OS.

因为$AT^2=BS^2=AB^2$，$OT=OS$，所以$\triangle OAT\cong\triangle OBS$，所以$OA=OB$，即$\odot O$关于$AB$的垂直平分线对称.所以$P'$、$Q'$、$R'$都在圆$O$上.

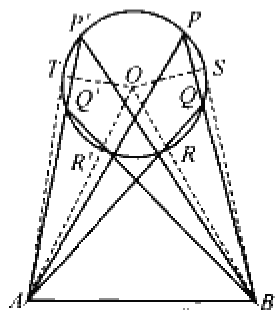


图 3-2

评注 圆幂定理是证明点共圆的一种常用方法.

例 2 如图3-3，从半圆上的一点C向直径AB引垂线，设垂足为D，作$\odot O_1$切$\overset{\frown}{BC}$、CD、DB分别于E、F、G.求证：$AC=AG$.

证明 设半圆的圆心为O，则O、O_1、E共线.连O_1F，知$O_1F\perp CD$，得$O_1F\parallel AB$.连EF、AE，由$\angle FEO_1=\frac{1}{2}\angle FO_1O=\frac{1}{2}\angle EOB=\angle OEA$，知$E$、$F$、$A$三点共线.

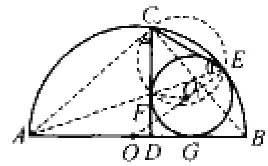


图 3-3

又因$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，有$\angle ACF=\angle ABC=\angle AEC$，从而$AC$是$\odot CEF$的切线，故点$A$对$\odot CEF$的幂$AC^2$等于点$A$对$\odot O_1$的幂$AG^2$，即有$AC=AG$.

例 3 如图3-4，设$\triangle ABC$的AB上有一点D，AC上有一点E，且$DE\parallel BC$，分别以BE、CD为直径作$\odot O_1$、$\odot O_2$，求证：这两圆的根轴恒为$\triangle ABC$的过点A的高所在的直线.

证明 设两圆的圆心为O_1、O_2，连O_1O_2，由于O_1、O_2是梯形$BCED$两条对角线的中点，则$O_1O_2\parallel BC$.$\odot O_1$和$\odot O_2$的根轴与BC垂直.

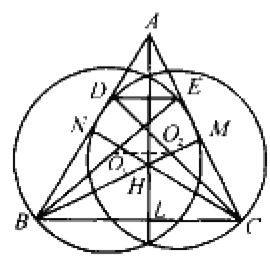


图 3-4

设$\triangle ABC$的三条高为AL、BM、CN，垂心是H，则M在$\odot O_1$上，N在$\odot O_2$上，且B、C、M、N共圆，直径为BC.将这圆称为$\odot O_3$.

因为这三个圆的圆心不在同一条直线上，所以三条根轴必相交于同一点根心.

因$\odot O_3$与$\odot O_1$的公共弦是BM，所以BM是根轴.同理，CN是根轴.因为BM和CN相交于垂心H，所以$\odot O_1$和$\odot O_2$的根轴是过垂心H且垂直于BC的直线，即高AL所在的直线.

从上述的证明中可以看出H是$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$的根心，其中对$\odot O_1$和$\odot O_2$有$DE\parallel BC$的限制，$\odot O_3$又是以BC为直径的圆，其实这些条件都可以去掉.

例 4 如图3-5，$\odot O_1$与$\odot O_2$相离，引它们的一条外公切线切$\odot O_1$于A，切$\odot O_2$于C，又引它们的一条内公切线切$\odot O_1$于B，切$\odot O_2$于D.求证：直线AB和CD的交点在两圆的连心线上.

证明 设直线AB和CD的交点为K，直线AC与BD的交点为E，连O_1E、O_2E，则$AB\perp O_1E$，$CD\perp O_2E$.

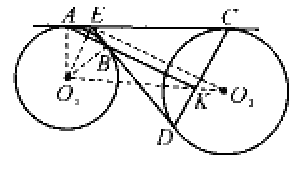


图 3-5

由 O_1E 平分$\angle AEB$，O_2E 平分$\angle CED$，知 $O_1E\perp O_2E$，由此推知 $AB\perp CD$，即 K 是分别以 AC 和 BD 为直径的两圆 Γ_1 和 Γ_2 的交点，从而 K 在圆 Γ_1 和圆 Γ_2 的根轴上.

连 O_1A，O_1B，又由 $O_1A\perp AC$，知 O_1A 是圆 Γ_1 的切线，O_1 关于圆 Γ_1 的幂是 O_1A^2.

同理，O_1B 是圆 Γ_2 的切线，O_1 关于 Γ_2 的幂是 O_1B^2. 由于 $O_1A^2=O_1B^2$，所以 O_1 是关于圆 Γ_1 和 Γ_2 的等幂点.

同样，O_2 是关于圆 Γ_1 的圆 Γ_2 的等幂点. 所以 O_1O_2 是圆 Γ_1 和 Γ_2 的根轴. 于是，K 在连心线 O_1O_2 上.

例 5 如图 3-6，在$\triangle ABC$ 的边 BC 上任取一点 A'，线段 $A'B$ 的中垂线交边 AB 于 M 点，线段 $A'C$ 的中垂线交边 AC 于 N 点，求证：点 A' 关于直线 MN 的对称点在$\triangle ABC$ 的外接圆上.

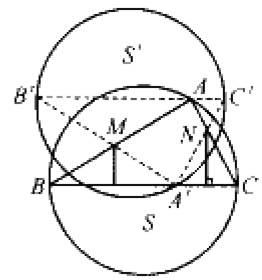


图 3-6

证明 过 A 引 BC 的平行线，并与 $A'M$ 的延长线交于 B'，与 $A'N$ 的延长线交于 C'，令$\triangle ABC$ 的外接圆为 S，$\triangle A'B'C'$的外接圆为 S'.

因为$\triangle MBA'$ 和$\triangle NA'C$ 都是等腰三角形，$B'C'\parallel BC$，所以在$\triangle MAB'$和$\triangle NAC'$中，

$\angle MBA'=\angle MA'B=\angle MB'A=\angle MAB'$，

$\angle NA'C=\angle NCA'=\angle NAC'=\angle NC'A$，

所以$\triangle MAB'$和$\triangle NAC'$是等腰三角形，且 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，所以$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

因为 $AM\cdot BM=A'M\cdot B'M$，$AN\cdot CN=A'N\cdot C'N$，

所以 M、N 是圆 S 和 S'的等幂点，所以直线 MN 是圆 S 和 S'的根轴. 因为 S 和 S'是等圆，所以 MN 是 S 和 S'的对称轴.

因为点 A'在圆 S'上，所以 A'关于 MN 的对称点在圆 S 上.

例 6 如图 3-7，$\triangle ABC$ 中，O 为外心，三条高 AD、BE、CF 相交于点 H，直线 ED 和 AB 交于点 M，FD 和 AC 交于点 N. 求证：(1)$OB\perp DF$，$OC\perp DE$；(2)$OH\perp MN$.

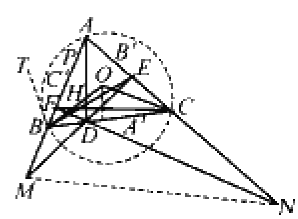


图 3-7

证明 (1)过 B 作$\triangle ABC$ 的外接圆的切线 BT，则由 A、F、D、C 四点共圆，知$\angle TBA=\angle ACB=\angle BFD$，有 $DF\parallel BT$，而 $OB\perp BT$，故 $OB\perp DF$. 同理 $OC\perp DE$.

(2)取 OH 的中点 V，下证 V 为$\triangle DEF$ 的外心. 设 A'、B'、C'分别为 BC、CA、AB 的中点. 由 A、B、D、E 四点共圆，有$\angle BED=\angle BAD=90^\circ-\angle B$. 同

理，$\angle BEF=\angle BCF=90^\circ-\angle B$. 从而$\angle DEF=\angle BED+\angle BEF=180^\circ-2\angle B$.

又因为A'为Rt$\triangle BFC$的斜边BC上的中点，知$\angle FA'B=2\angle FCB=180^\circ-2\angle B$，从而知$F$、$A'$、$D$、$E$四点共圆.

同理，D、F、B'、E及C'、F、D、E分别四点共圆，由此即知A'、B'、C'、D、E、F六点共圆.

又因为$OA'\perp BC$，$DH\perp BC$，V为OH的中点，即知V在$A'D$的垂直平分线上.

同理，V在$B'E$、FC'的垂直平分线上，故V是$\triangle DEF$的外接圆的圆心.

再由D、E、A、B及D、F、A、C分别四点共圆，有$MD\cdot ME=MB\cdot MA$，$ND\cdot NF=NC\cdot NA$. 由此即知M、N对$\triangle ABC$的外接圆与$\triangle DEF$的外接圆的幂相等，从而M、N在这两个外接圆的根轴上，即有$MN\perp OV$，故$MN\perp OH$.

例 7 如图 3-8，已知两个半径不相等的$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于M、N两点，且$\odot O_1$、$\odot O_2$分别与$\odot O$内切于S、T两点，求证：$OM\perp MN$的充要条件是S、N、T三点共线.

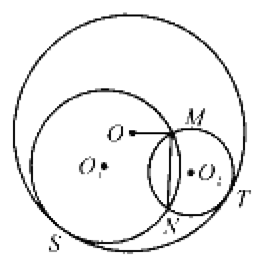


图 3-8

证明 由已知条件知O、O_1、S三点共线，O、O_2、T三点共线，延长MN交$\odot O$于K、P，过S作$\odot O_1$的切线SQ，过T作$\odot O_2$的切线TQ. 由蒙日定理三条根轴交于一点Q，即M、N、Q三点共线.

充分性：若S、N、T三点共线.

因为QS、QT为切线，

所以$\angle TSQ=\angle STQ$；

因为$OS\perp SQ$，$OT\perp TQ$，

所以O、S、Q、T四点共圆.

所以$\angle TSQ=\angle TOQ$.

又因为$\angle STQ=\angle TMQ$，

所以$\angle TOQ=\angle TMQ$.

所以O、M、T、Q四点共圆.

所以$OT\perp TQ$，所以$\angle OMN=90^\circ$.

必要性：若$\angle OMN=90^\circ$.

因为$OS\perp SQ$，$OT\perp TQ$，

所以$\angle OSQ=\angle OTQ=\angle OMQ=90^\circ$.

所以O、M、T、Q、S五点共圆.

延长TN交$\odot O$于S_1，交$OMTQS$所确定的圆于S_2，如图 3-9，则$S_1N\cdot NT=PN\cdot KN$，$S_2N\cdot NT=MN\cdot QN$.

因为$\angle OMN=90^\circ$，所以$OM\perp KP$，从而有$MK=MP$. 又由于$QP\cdot QK=QS^2=QN$

$\cdot QM$，所以 $QP\cdot(QM+MP)=(PQ+PN)\cdot QM$. 所以 $QP\cdot MP=PN\cdot QM$，即 $(QN-PN)(MN+PN)=PN(QN+MN)$，即

$QN\cdot MN=PN\cdot MN+PN\cdot MN+PN^2=PN(MN+NP)+PN\cdot MN=PN(MK+MN)=PN\cdot KN$.

即有 $S_1N\cdot NT=S_2N\cdot NT$，所以 $S_1N=S_2N$，即 S_1、S_2 重合.

而 S 是五点圆与⊙O 的交点，所以 $S_1=S_2=S$，即 S、N、T 三点共线.

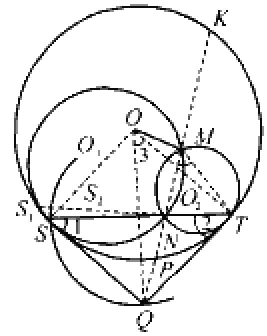


图 3-9

思考交流

思考题 1　如图 3-10，某圆分别与凸四边形 $ABCD$ 的 AB、BC 两边相切于 G、H 两点，与对角线 AC 相交于 E、F 两点. 问 $ABCD$ 应满足怎样的充要条件，使得存在另一圆过 E、F 两点，且分别与 DA、DC 的延长线相切？证明你的结论.

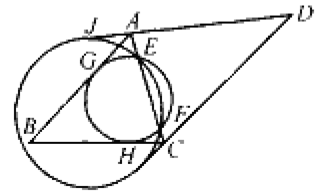


图 3-10

分析　所求的充要条件是 $AB+AD=CB+CD$.

证明　必要性：设过 E、F 两点的另一圆分别与 DA 的延长线和 DC 的延长线相切于 J 和 K 两点. 注意到点 A 关于这两个圆的幂相等，即 $AG^2=AE\cdot AF=AJ^2$，同样有 $CH^2=CK^2$，则有 $AB+AD=BG+GA+AD=BG+JA+AD=BG+JD=BH+KD=BH+KC+CD=BH+HC+CD=BC+CD$.

充分性：设凸四边形 $ABCD$ 满足条件 $AB+AD=CB+CD$.

在 DA 的延长线和 DC 的延长线上分别取 J 点和 K 点，使 $AJ=AG$，$CK=CH$. 于是，$DJ=JA+AD=AG+AD=AB+AD-BG=CB+CD-BH=CH+CD=DK$.

过 J 点和 K 点分别作 DJ 和 DK 的垂线，以两垂线交点为圆心作通过 J 点和 K 点的圆，由于 $AJ=AG$，$CK=CH$，则 A 点和 C 点关于原有圆的幂分别等于这两点关于所作圆的幂. 而直线 AC 与原有圆相交于 E 和 F 两点，且 AC 是这两圆的根轴，所以 EF 是这两圆的公共弦. 至此，便证明了所作的与 DA 延长线和 DC 延长线相切的圆通过 E、F 两点.

同步检测

1. 如图 3-11，某圆分别与凸四边形 $ABCD$ 的 AB、BC 两边相切于 G、H 两点，与对角线 AC 相交于 E、F 两点；问 $ABCD$ 应满足怎样的充要条件，使得存在另一圆过 E、F 两

点，且分别与 DA、DC 的延长线相切？

2. 如图 3-12，I 是 $\triangle ABC$ 的内心，过 I 作 AI 的垂线，分别交边 AB、AC 于 P、Q. 求证：分别与 AB 及 AC 相切于 P 及 Q 的圆 L 必与 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 相切.

3. 如图 3-13，已知两个半径不相等的圆 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 M、N 两点，且 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 分别与 $\odot O$ 内切于 S、T 两点. 求证：$OM \perp MN$ 的充要条件是 S、N、T 三点共线.

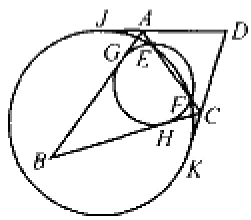


图 3-11

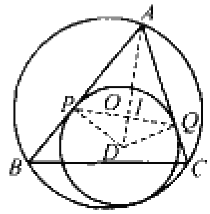


图 3-12

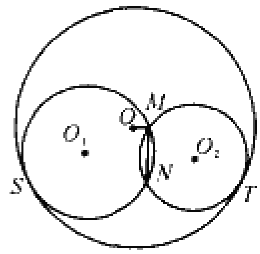


图 3-13

4. 如图 3-14，D、E 是 $\triangle ABC$ 中 AB、AC 上的点，求证：以 BE 和 CD 为直径的两圆的根轴必通过 $\triangle ABC$ 的垂心 H.

5. 如图 3-15，$\odot O$ 过 $\triangle ABC$ 的顶点 A、C，且与 AB、BC 交于 K、N（K 与 N 不同），$\triangle ABC$ 的外接圆和 $\triangle BKN$ 的外接圆相交于 B 和 M. 求证：$\angle BMO=90°$.

6. 如图 3-16，四边形 $ABCD$ 内接于圆，其边 AB 与 DC 的延长线交于点 P，AD 与 BC 的延长线交于点 Q，由 Q 作该圆的两条切线 QE 和 QF，切点分别为 E、F，则 P、E、F 三点共线.

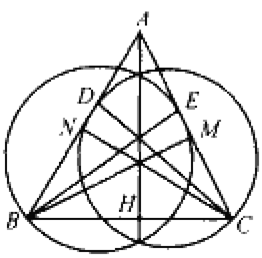


图 3-14

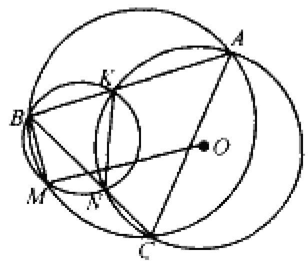


图 3-15

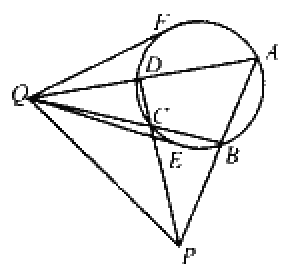


图 3-16

第2讲 九点圆定理

知识点金

九点圆定理 三角形三条高的垂足、三边的中点，以及垂心与顶点的三条连接线段的中点，这九点共圆.

定理(欧拉圆) 已知如图3-17，在$\triangle ABC$中，H是垂心，L、M、N分别为BC、CA、AB的中点，D、E、F分别为三高之垂足，P、Q、R分别是AH、BH、CH的中点，求证：L、M、N、D、E、F、P、Q、R九点共圆.

证明 连LP、MQ、NR、LR、RP、LM、MP、LQ、QP、LN、NP，则

$NP /\!/ BE /\!/ LR$，$LQ /\!/ CF /\!/ MP$，

$LN /\!/ RP /\!/ AC$，$ML /\!/ PQ /\!/ AB$.

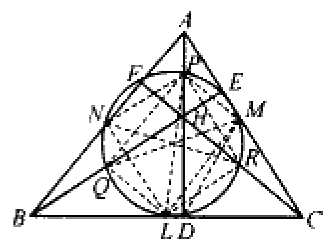


图3-17

又$BE \perp AC$，$CF \perp AB$，所以$LQ \perp PQ$，$LM \perp PM$，$LN \perp NP$，$LR \perp RP$. 所以，L、M、N、P、Q、R六点共圆，并且PL、QM、RN都是直径.

由于$\angle LDP = \angle MEQ = \angle NFR = 90°$，所以$D$、$E$、$F$亦在此圆上.

所以，L、M、N、P、Q、R、D、E、F九点共圆.

这九点所共的圆称为欧拉圆或九点圆.

关于九点圆和欧拉线，我们有：

九点圆的圆心在三角形的欧拉线上，而且它到垂心和外心的距离相等.

对圆内接四边形还有更精彩的结果：

对圆内接四边形$ABCD$中任三个顶点作三角形，这四个三角形的九点圆圆心都在同一个圆周上. 我们把过这四个九点圆圆心的圆叫作圆内接四边形$ABCD$的九点圆.

例题精析

例 1 如图 3-18，$\triangle ABC$ 中，O 为外心，三条高 AD、BE、CF 交于点 H，直线 ED 和 AB 交于点 M，FD 和 AC 交于点 N. 求证：(1)$OB\perp DF$，$OC\perp DE$；(2)$OH\perp MN$.

证明 (1)设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，由相交弦定理，有 $R^2-OF^2=AF\cdot FB$，$R^2-OD^2=BD\cdot DC$，

从而 $OF^2-OD^2=BD\cdot DC-AF\cdot FB$.

由 A、F、D、C 四点共圆，有 $BD\cdot BC=BF\cdot BA$，即 $BD\cdot(BD+DC)=BF(BF+FA)$，亦即 $BF^2-BD^2=BD\cdot DC-AF\cdot FB=OF^2-OD^2$，故 $OB\perp DF$. 同理，$OC\perp DE$.

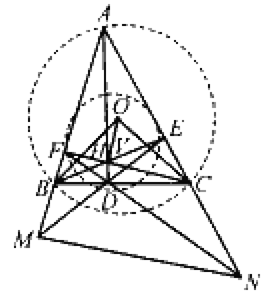


图 3-18

(2)由九点圆定理不难获知 OH 的中点 V 为$\triangle DEF$ 的外心. 又由 D、E、A、B 及 D、F、A、C 分别四点共圆，有 $MD\cdot ME=MB\cdot MA$，$ND\cdot NF=NC\cdot NA$.

由此，即知 M、N 对$\triangle ABC$ 的外接圆与$\triangle DEF$ 的外接圆的幂相等，从而 M、N 在这两个外接圆的根轴上，即有 $MN\perp OV$，故 $MN=OH$.

例 2 试证：$\triangle ABC$ 的垂心 H 与其外接圆上的点的连线被其九点圆平分.

证明 如图 3-19，过垂心 H 作$\triangle ABC$ 外接圆的两条弦 DE、FG，连 DF、EG.

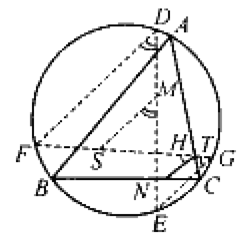


图 3-19

设 M、N、S、T 分别为 HD、HE、HF、HG 的中点，则

$\angle FDH=\angle SMH$，$\angle EGH=\angle NTH$.

又$\angle FDH=\angle EGH$，则$\angle SMH=\angle NTH$.

故 M、S、T、N 四点共圆.

由 DE、FG 的任意性，得 H 与$\triangle ABC$ 外接圆上任意点连线的中点在同一圆上，由于这个圆过 HA、HB、HC 的中点，故这个圆就是$\triangle ABC$ 的九点圆，从而命题获证.

例 3 证明：圆的直径两端点对$\triangle ABC$ 的西姆松线垂直相交，且相交于此三角形的九点圆上.

证明 设 POP'是$\triangle ABC$ 的外接圆（圆心为 O）的直径，关于 P 点的西姆松线为 l_1，关于 P'点的西姆松线为 l_2，因为 l_1 与 l_2 的交角可以$\frac{1}{2}\widehat{PP'}$度量，从而 l_1 与 l_2 的交角为直角. 设 H 为$\triangle ABC$ 的垂心，则 l_1 和 l_2 分别经过 PH、$P'H$ 的中点 Q、Q'，而 Q 和 Q'在$\triangle ABC$ 的九点圆上，H 点是三角形的九点圆和外接圆的外位似中心，线段 QQ'是线段

PP'的位似图形，从而 QQ'是九点圆的直径，故 l_1 和 l_2 的交点在$\triangle ABC$ 的九点圆上.

例 4 证明：$\triangle ABC$ 的九点圆与它的内切圆及三个旁切圆相切.

证明 设 I、O、H、V 分别为$\triangle ABC$ 的内心、外心、垂心及九点圆圆心，R、r、ρ 分别为$\triangle ABC$ 外接圆、内切圆、九点圆的半径，I_A、ρ_A 分别为在 BC 边外侧相切的旁切圆圆心和半径，则由心距公式，有

$OI^2=R^2-2Rr$，$IH^2=2r^2-2R\rho$，$OH^2=R^2-4R\rho$.

注意到 V 为 OH 的中点，由斯特瓦尔特定理的推论（即三角形中线长公式），有 $VI^2=\frac{1}{2}(VI^2+HI^2)-VH^2=\frac{1}{4}R^2-Rr+r^2=(\frac{1}{2}R-r)^2$，即 $VI=\frac{1}{2}R-r$. 故九点圆与内切圆相内切.

同理，$OI_A^2=R^2+2R\rho_A$，得 $VI_1^2=(\frac{1}{2}R+\rho_A)^2$，即有 $VI_A=\frac{1}{2}R+\rho_1$，故九点圆与此旁切圆相外切.

同理，可证九点圆与其他两个旁切圆相外切.

例 5 如图 3-20，锐角$\triangle ABC$ 中，角 A 的等分线与三角形的外接圆交于另一点 A_1，点 B_1、C_1 与此类似. 直线 AA_1 与 B、C 两角的外角等分线交于 A_0，点 B_0、C_0 与此类似. 求证：(1)$\triangle A_0B_0C_0$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 面积的二倍；(2)$\triangle A_0B_0C_0$ 的面积至少是$\triangle ABC$ 面积的四倍.

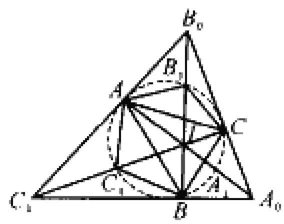


图 3-20

证明 (1)令$\triangle ABC$ 的内心为 $I(I=AA_0\cap BB_0\cap CC_0)$，则 I 又是$\triangle A_0B_0C_0$ 的垂心（内、外角平分线互相垂直）. 显然，$\triangle ABC$ 的外接圆是$\triangle A_0B_0C_0$ 的九点圆，即知 A_1、B_1、C_1 分别为 A_0I、B_0I、C_0I 的中点，于是得 $S_{\triangle A_0BI}=2S_{\triangle A_1BI}$，$S_{\triangle A_0CI}=2S_{\triangle A_1CI}$，从而 $S_{四边形A_0BIC}=2S_{四边形A_1BIC}$.

同理，$S_{四边形B_0CIA}=2S_{四边形B_1CIA}$，$S_{四边形C_0AIB}=2S_{四边形C_1AIB}$，

故 $S_{\triangle A_0B_0C_0}=2S_{六边形AC_1BA_1CB_1}$.

(2)由(1)，有$\frac{S_{\triangle A_0B_0C_0}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2(S_{\triangle A_1BC}+S_{\triangle B_1CA}+S_{\triangle C_1AB})}{S_{\triangle ABC}}+2$.

故只要证 $k=\frac{S_{\triangle A_1BC}+S_{\triangle B_1CA}+S_{\triangle C_1AB}}{S_{\triangle ABC}}\geqslant 1$.

记$\angle BAC=2\alpha$，$\angle ABC=2\beta$，$\angle BCA=2\gamma$，则

$$\frac{S_{\triangle A_1BC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}A_1B\cdot A_1C\cdot\sin(180^\circ-2\alpha)}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin 2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha}{\sin 2\gamma\cdot\sin 2\beta\cdot\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin 2\beta\cdot\sin 2\gamma}.$$

同理，$\frac{S_{\triangle B_1CA}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\sin^2\beta}{\sin2\alpha\cdot\sin2\gamma}$，$\frac{S_{\triangle C_1AB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\sin^2\gamma}{\sin2\alpha\cdot\sin2\beta}$.

于是，
$$k=\frac{\sin^2\alpha}{\sin2\beta\cdot\sin2\gamma}+\frac{\sin^2\beta}{\sin2\alpha\cdot\sin2\gamma}+\frac{\sin^2\gamma}{\sin2\alpha\cdot\sin2\beta}$$
$$\geqslant3\sqrt[3]{\frac{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}{\sin^22\alpha\cdot\sin^22\beta\cdot\sin^22\gamma}}=\frac{3}{4}(\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)^{-\frac{2}{3}}$$
$$\geqslant\frac{3}{4}\left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\right)^{-2}\geqslant\frac{3}{4}\left(\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^{-2}=1.$$

例 6 如图 3-21，$\triangle A_1A_2A_3$ 是一非等腰三角形，它的边长分别为 a_1、a_2、a_3，其中 a_i 是 A_i 的对边（$i=1,2,3$），M_i 是边 a_i 的中点．$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆$\odot I$ 切边 a_i 于 T_i 点，S_i 是 T_i 关于$\angle A_i$ 角平分线的对称点（$i=1,2,3$）．求证：M_1S_1，M_2S_2，M_3S_3 三线共点．

证明 由题设，知 $M_1M_2\parallel A_2A_1$，下面证 $S_1S_2\parallel A_2A_1$．

由 T_1 和 S_1，T_2 和 T_3 分别关于直线 A_1I 对称，有$\overset{\frown}{T_1T_2}=\overset{\frown}{T_3S_1}$．

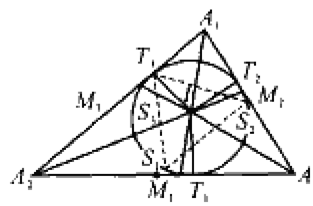


图 3-21

同理，$\overset{\frown}{T_1T_2}=\overset{\frown}{T_3S_2}$．

故有$\overset{\frown}{T_3S_1}=\overset{\frown}{T_3S_2}$，即 T_3 是等腰$\triangle T_3S_1S_2$ 的顶点，有 $T_3I\perp S_1S_2$，从而 $S_1S_2\parallel A_2A_1$．

同理，$S_2S_3\parallel A_3A_2$，$S_3S_1\parallel A_1A_3$．

又 $M_1M_2\parallel A_2A_1$，$M_2M_3\parallel A_3A_2$，$M_3M_1\parallel A_1A_3$，于是$\triangle M_1M_2M_3$ 和$\triangle S_1S_2S_3$ 的对应边两两平行，故这两个三角形或全等或位似．

由于$\triangle S_1S_2S_3$ 内接于$\triangle ABC$ 的内切圆，而$\triangle M_1M_2M_3$ 内接于$\triangle ABC$ 的九点圆，且$\triangle A_1A_2A_3$ 不为正三角形，故其内切圆与九点圆不重合，所以$\triangle S_1S_2S_3$ 与$\triangle M_1M_2M_3$ 位似，这就证明了 M_1S_1、M_2S_2、M_3S_2 共点（于位似中心）．

例 7 已知过锐角$\triangle ABC$ 顶点 A、B、C 的垂线分别交对边于 D、E、F，$AB>AC$，直线 EF 交 BC 于 P，过点 D 且平行 EF 的直线分别交 AC、AB 于 Q、R，N 是 BC 上的一点，且$\angle NQP+\angle NRP<180°$．求证：$BN>CN$．

证法 1 取 BC 中点 M，只需证明$\angle MRP+\angle MQP=180°$，即 R、M、Q、P 四点共圆．

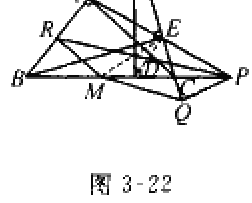


图 3-22

如图 3-22，连结 E、D．易知$\angle PEC=\angle DEC$，$\angle DEB=\angle FEB$，有
$$\frac{PC}{CD}=\frac{PE}{ED}=\frac{PB}{BD}.$$

连结 M、E．$\angle EMC=180°-2\angle ACB$，

$\angle EDP=180^\circ-\angle ACB-\angle CED$，

故 $\angle MED=\angle ACB-\angle CED=\angle EPC$.

所以，$\triangle MDE\backsim\triangle MEP$.

从而有 $ME^2=MD\cdot MP=MC^2$.

又因为 $RQ/\!/EP$，

所以$\angle BRD=\angle BFE=\angle DCQ$.

所以 B、R、C、Q 四点共圆.

$RD\cdot DQ=BD\cdot CD=(BM+MD)(CM-MD)=MC^2-MD^2=MD\cdot MP-MD^2=MD\cdot PD$.

所以 R、M、Q、P 四点共圆.

即 $\angle MRP+\angle MQP=180^\circ$.

当 $N\in BC$ 且$\angle NQP+\angle NRP<180^\circ$时，$N$ 必在 M 右侧，故 $BN>CN$.

证法 2 取 BC 的中点为 N'. 在锐角$\triangle ABC$ 中，$AB>AC$.

首先证明：

P、Q、R、N'四点共圆$\Leftrightarrow DR\cdot DQ=DP\cdot DN'$.

因为 $BE\perp AC$ 于 E，$CF\perp AB$ 于 F，则

B、C、E、F 四点共圆.

于是$\angle CEP=\angle ABC$.

又 $EF/\!/QR$，得$\angle CEP=\angle CQD$.

故 B、Q、C、R 四点共圆，则

$DR\cdot DQ=DB\cdot DC$.

设 $BN'=CN'=a$，$CP=c$，$DN'=b$，则等价于

证明 $DB\cdot DC=DP\cdot DN'$，即

$(a+b)(a-b)=(a+c-b)b\Rightarrow a^2=b(a+c)$.

又 $PE\cdot PF=PC\cdot PB$，

并由欧拉圆（九点圆）得 D、E、F、N'四点共圆，

由 $PE\cdot PF=PD\cdot PN'$，

得 $PC\cdot PB=PD\cdot PN'$，

即 $c(2a+c)=(a+c-b)(a+c)$，

$a^2=b(a+c)$.

故 P、Q、R、N'四点共圆. 从而，

$\angle N'QP+\angle N'RP=180^\circ$.

若$\angle NQP+\angle NRP<180^\circ$，则 N 在 N'右侧.

于是 $BN>CN$.

例 8 如图 3-23,在$\triangle ABC$中,AD是BC边上的高,M、N分别是CA、AB两边的中点.设直线l通过A点,且BC在l上的射影为$B'C'$,连$B'N$与$C'M$交于点P.求证:B'、C'、D、P四点共圆,且其圆心O与P点均在$\triangle ABC$的九点圆上.

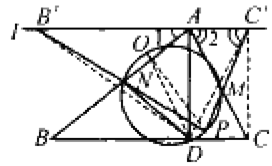


图 3-23

证明 连BB'、CC'、ND、MD.在$Rt\triangle AB'B$中,N为斜边AB的中点,令$\angle BAB'=\angle 1$,则$\angle NB'A=\angle 1$.

同理,$\angle NAD=\angle NDA$,$\angle MAD=\angle MDA$.令$\angle CAC'=\angle 2$,则$\angle MC'A=\angle 2$.

于是,$\angle NB'A+\angle MC'A=\angle 1+\angle 2=180^\circ-\angle A$.

故 $\angle MPN=180^\circ-(\angle NB'A+\angle MC'A)=180^\circ-(180^\circ-\angle A)=\angle A=\angle NAD+\angle DAM=\angle NDA+\angle ADM=\angle MDN$.

由此,知D、M、N、P四点共圆.

而$\triangle MND$的外接圆即为$\triangle ABC$的九点圆,即点P在$\triangle ABC$的九点圆上.

由A、B'、B、D四点共圆,连$B'D$,则知$\angle B'DA=\angle B'BA=90^\circ-\angle 1$.

同理,$\angle C'DA=\angle C'CA=90^\circ-\angle 2$.

于是,$\angle B'DC'=\angle B'DA+\angle C'DA=180^\circ-\angle 1-\angle 2=\angle A=\angle MPN=\angle B'PC'$.

故B'、C'、D、P四点共圆.

由题设,$\odot B'C'DP$的圆心为O,连DO、PO,则$\angle DOP=2\angle DB'P$.

由于A、B'、B、D四点共圆且以N为其圆心,则知$NB'=ND$.

于是,有$\angle DNP=2\angle DB'P$,

所以$\angle DOP=\angle DNP$,所以D、O、P、N四点共圆,

所以O在$\odot DPN$上,即O在$\triangle ABC$的九点圆上,故命题获证.

思考交流

思考题 1 如图 3-24,$\triangle ABC$中,O为外心,H是垂心,作$\triangle CHB$、$\triangle CHA$和$\triangle AHB$的外接圆,依次记它们的圆心为A_1、B_1、C_1.求证:$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$,且这两个三角形的九点圆重合.

证明 由于$\angle CHB=180^\circ-(90^\circ-\angle B)-(90^\circ-\angle C)=\angle B+\angle C=180^\circ-\angle A$,知$\triangle CHB$外接圆的半径和$\triangle CAB$外接圆的半径相等,从而,有$A_1$是$O$关于$BC$的对称点.

设M是BC中点,则知$AH=2OM$,即$AH=OA_1$.

又$AH\parallel OA_1$,则连AA_1与OH的交点K为平行四边形AHA_1O的中心,即AA_1与

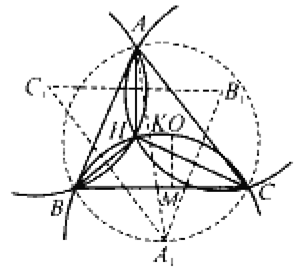


图 3-24

OH 互相平分于 K.

同理，BB_1、CC_1 也经过 K 且被它平分，从而 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 关于 K 中心对称，故 $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$.

显然，K 是 $\triangle ABC$ 九点圆的圆心. 因此，这个圆关于 K 作中心对称时不变，它也是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的九点圆.

思考题 2　过锐角 $\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 的三条高线分别交其对边于点 D、E、F，过点 D 平行于 EF 的直线分别交 AC、AB 于点 Q 和 R，EF 交 BC 于点 P. 证明：$\triangle PQR$ 的外接圆过 BC 的中点.

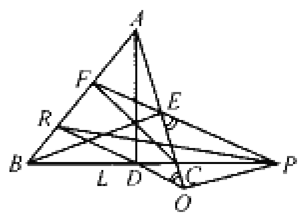


图 3-25

证明　由题设，点 P 的存在意味着 $AB \neq AC$.

由对称性，可设 $AB > AC$，则 P 在射线 BC 上，如图 3-25.

取 BC 的中点 L，我们证明 Q、P、R、L 四点共圆 $\Leftrightarrow DR \cdot DQ = DP \cdot DL$.　①

因 $BE \perp AC$ 于 E，$CF \perp AB$ 于 F，则 B、C、E、F 共圆，于是知 $\angle CEP = \angle ABC$.

又 $EF /\!/ QR$，有 $\angle CEP = CQD$，则知 B、Q、C、R 四点共圆，从而 $DR \cdot DQ = DB \cdot DC$.

设 $BL = CL = a$，$CP = c$，$DL = b$，则证①式等价于证明 $DB \cdot DC = DP \cdot DL$，即 $(a+b) \cdot (a-b) = (a+c-b) \cdot b$，亦即 $a^2 = b(a+c)$.

由九点圆定理，知 D、E、F、L 四点共圆，有 $PE \cdot PF = PD \cdot PL$.

注意到 B、C、E、F 四点共圆，有 $PE \cdot PF = PC \cdot PB$，故得 $PC \cdot PB = PD \cdot PL$，即 $c(2a+c) = (a+c-b) \cdot (b+a)$，亦即 $a^2 = b(a+c)$.

故有 $DB \cdot DC = DP \cdot DL$，亦有 $DR \cdot DQ = DP \cdot DL$.

亦即 Q、P、R、L 四点共圆，即 $\triangle PQR$ 的外接圆过 BC 的中点.

同步检测

1. G 为 $\triangle ABC$ 的重心，P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上任一点，连 PG 并延长至点 Q，使 $PQ = \frac{1}{2}PG$. 求证：点 Q 在 $\triangle ABC$ 的九点圆上.

2. 给定非退化的 $\triangle ABC$，设外心为 O，垂心为 H，外接圆的半径为 R. 求证：$OH < 3R$.

3. 如图 3-26，H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，L 为 BC 边的中点，P 为 AH 的中点. 过 L 作 PL

的垂线交 AB 于 G，交 AC 的延长线于 H. 求证：G、B、H、C 四点共圆.

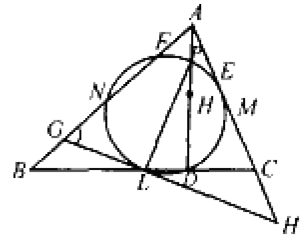


图 3-26

4. 试证：三角形的三个切圆（内切和旁切）的圆心构成一个三角形，此新三角形的外心对于已知三角形的外心为另外一个切圆圆心的对称点.

5. I_A、I_B、I_C 分别为$\triangle ABC$ 的切 BC、CA、AB 边的旁切圆的圆心. 试证：(1)$\triangle I_AI_BI_C$ 的九点圆为$\triangle ABC$ 的外接圆；(2)过点 I_A、I_B、I_C 分别作 BC、CA、AB 边的垂线，则这三条垂线共点.

6. 求证：圆周上任意四点，过其中任意三点作三角形，则这四个三角形的九点圆的圆心共圆.

第3讲 几类重点问题及解法

知识点金

1. 四点共圆问题

2. 共线与共点问题

(1)共线问题

在同一直线上的若干点称为共线点，或称为这些点共线. 共线问题一般都转化为三点共线.

(2)线共点问题

通过同一点的若干直线称为共点线，或称为这些直线共点.

3. 定值、极值与轨迹问题

(1)定值问题

平面几何中的定值问题是指变动的图形中某些几何元素的几何量保持不变，或几何元素间的某些几何性质或位置关系不变的问题.

定值问题有定量定值问题(指定长、定角、定比等)和定位定值问题(过定点、过定直线等).

求解定值问题一般可分为两步：第一步，先探求定值，通常运用特殊位置法，不论图形如何变动，定值这一共性始终是不变的. 因此，可选择图形的特殊位置(如极限位置、临界位置)加以探求，或利用数形结合的思想，把几何问题转化为代数问题，然后通过计算求出定值. 第二步，证明定值普遍成立.

(2)极值问题

几何极值问题实际上就是以几何条件出现的极值问题，一般运用几何中的有关不等式和定理解决，也可转化为代数三角的方法加以解决.

(3)轨迹问题

平面几何中点的轨迹就是具有某种性质的所有的点组成的图形(也叫具有某种性质的点的集合)在这一节里，求点的轨迹，主要运用基本的轨迹定理和纯几何的方法.

轨迹为直线的基本定理有：

①到定直线距离等于定长的点的轨迹，是平行于该直线的两条直线；

②到两定点 A、B 距离相等的点的轨迹，是线段 AB 的垂直平分线；

③到两相交直线距离相等的点的轨迹，是这两直线夹角的平分线或其外角平分线；

④已知平面上两条线段 AB 和 CD，则使 $S_{\triangle ABP}+S_{\triangle CDP}$ 为定值的点 P 的轨迹是一条直线.

轨迹为圆(或弧)的基本定理有：

①到定点的距离等于定长的点的轨迹，是以该定点为圆心，以定长为半径的圆；

②对定线段 AB 张成定角 θ 的点的轨迹，是以 AB 为弦，所含圆周角等于 2θ 的两个弓形弧；

③点 P 到两定点的距离之比为定比 $\frac{m}{n}(\neq 1)$. 若以 $\frac{m}{n}$ 内分和外分比两定点所连的线段，则以这两个分点所连线段为直径的圆，是到两定点距离比为定比 $\frac{m}{n}$ 的点的轨迹(称阿波罗尼斯圆).

例题精析

例 1 引三条直线分别平行三角形的三边，每条直线与其所平行的边之间的距离等于该边的长度，同时，对于每条边，平行于它的直线和该边所对顶点位于该边的两侧. 证明：三角形各边的延长线与所引的三条直线的交点在同一圆周上.

证明 $\triangle ABC$ 和有关点、直线如图 3-27 所示.

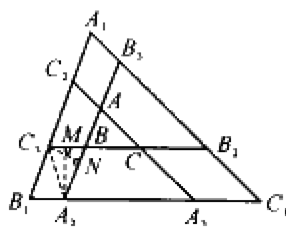


图 3-27

设 A_2、C_3 分别在直线 BC、AB 上的射影为 M、N，则 $\frac{BC_3}{BA_2}=\frac{C_3N}{A_2M}$，又 $C_3N=AB$，$A_2M=BC$，有 $\frac{BC_3}{BA_2}=\frac{AB}{BC}$，且 $\angle A_2BC_3=\angle ABC$，因此 $\triangle BC_3A_2 \backsim \triangle BAC$.

所以 $\angle C_3A_2B=\angle ACB$.

同理，$\angle C_2B_3A=\angle ACB$，有 $\angle C_3A_2B=\angle C_2B_3A$，且 $C_2C_3 /\!/ A_2B_3$，且 $A_2C_3C_2B_3$ 是等腰梯形，显然共圆.

又 $\angle C_2A_3A_2+\angle C_2C_3A_2=\angle ACB+(\angle ABC+\angle BAC)=180^\circ$，故 C_2、C_3、A_2、A_3 四点共圆. 因此，C_2、C_3、A_2、A_3、B_3 五点共圆.

类似地，C_2、C_3、A_2、B_2、B_3 五点共圆.

所以，A_2、A_3、B_2、B_3、C_2、C_3 六点共圆.

注 本题从先证 $C_2C_3A_2B_3$ 为等腰梯形入手(其中 $A_2A_3B_2C_3$、$B_2B_3C_2A_3$ 也为等腰梯形),再证 A_3 和 B_2 在该圆上.这里是利用角的关系求证四点共圆的.证多点共圆,通常先证其中四点共圆,再证从余下的点中取一点和上述共圆四点组中三点共圆,依次下去.

例 2 如图 3-28,已知点 D 是△ABC 形内一点,满足 $DA\cdot DB\cdot AB+DB\cdot DC\cdot BC+DC\cdot DA\cdot CA=AB\cdot BC\cdot CA$,把△$ADC$ 沿 CB 方向平移至△A_1D_1B,求证:A、D、B、D_1、A_1 五点共圆.

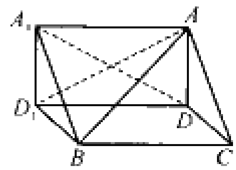


图 3-28

证明 连接 A_1D、AD_1,

因为 $AA_1 \mathrel{\underline{\parallel}} DD_1 \mathrel{\underline{\parallel}} CB$,

所以 $D_1A_1=DA$,$D_1B=DC$,$A_1B=AC$.

在四边形 A_1D_1BA 中,由广义的托勒密定理,有 $D_1A_1\cdot BA+BD_1\cdot AA_1\geqslant A_1B\cdot D_1A$,即 $DA\cdot BA+CD\cdot BC\geqslant AC\cdot D_1A$. ①

在四边形 AD_1BD 中,由广义的托勒密定理,有 $BD_1\cdot DA+BD\cdot D_1A\geqslant D_1D\cdot AB$,即 $DC\cdot DA+BD\cdot D_1A\geqslant AB\cdot BC$. ②

由①×DB+②×AC,有

$DA\cdot DB\cdot AB+DB\cdot DC\cdot BC+DA\cdot DC\cdot AC+AC\cdot BD\cdot D_1A\geqslant AC\cdot BD\cdot D_1A\cdot AB\cdot BC\cdot AC$,即

$DA\cdot DB\cdot AB+DB\cdot DC\cdot BC+DA\cdot DC\cdot AC\geqslant AB\cdot BC\cdot AC$. ③

由已知条件知,不等式③取到等号,从而不等式①、②必须同时取到等号,即 $D_1A_1\cdot BA+BD_1\cdot AA_1=A_1B\cdot D_1A$,且 $BD_1\cdot DA+BD\cdot D_1A=D_1D\cdot AB$,由托勒密定理的逆定理,知:四边形 A_1D_1BA 是圆内接四边形,且四边形 AD_1BD 是圆内接四边形.故 A、D、B、D_1、A_1 五点共圆.

评注 本例是通过托勒密定理的逆定理证明四点共圆,从而证明五点共圆的.

例 3 不过▱$ABCD$ 顶点的任一直线分别与直线 AB、BC、CD、DA 交于 E、F、G、H,以及⊙EFC 与⊙GHC 的另一交点 Q,如图 3-29.求证:A、C、Q 三点共线.

证明 连接 QA、QC、QE、QH.

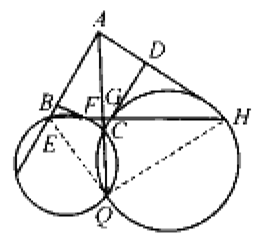


图 3-29

因为 E、F、C、Q 共圆,G、H、Q、C 共圆,

所以∠EQC=∠GFC,∠HQC=∠FGC,又∠BAD=∠FCG,

所以∠EQH+∠BAD=∠GFC+∠FGC+∠FCG=180°,有 A、E、Q、H 四点共圆.

所以∠EQA=∠EHA.

又因为 $BC/\!/DH$,所以∠EHA=∠GFC=∠EQC.

所以∠EQA=∠EQC,故 A、C、Q 三点共线.

评注 本题证明采用的判定依据是：设点 B 在线段 XY 上，且 $\angle ABX=\angle CBX$，则 A、B、C 三点共线（如图 3-30）．实际上这可归结于通过判定平角的意义来判定三点共线．从平角的意义而言，还有下面两个结论也是判定三点共线的重要依据（如图 3-31）：

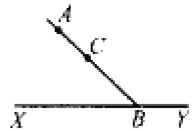


图 3-30

（1）设点 B 在线段 XY 上，且 $\angle ABX+\angle XBC=180^\circ$，则 A、B、C 三点共线．

（2）设点 B 在线段 XY 上，且 $\angle ABX=\angle CBY$，则 A、B、C 三点共线．

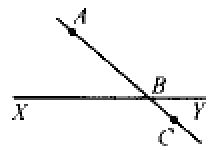


图 3-31

例 4 如图 3-32，$ABCDEF$ 是凸六边形，满足 $AB=BC=CD$，$DE=EF=FA$，$\angle BCD=\angle EFA=60^\circ$．设 G 和 H 是这六边形内部的两点，使得 $\angle AGB=\angle DHE=120^\circ$，$AG+GB+GH+DH+HE=CF$．分别以 AB、DE 为边向形外作正三角形 ABC'、正三角形 DEF'．求证：C'、G、H、F' 四点共线．

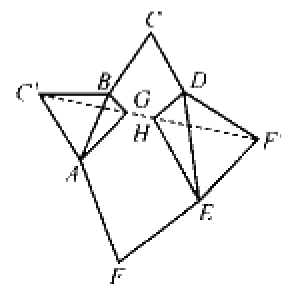


图 3-32

证明 连接 $C'G$、GH、HF'．

因为 $BC=CD$，$\angle BCD=60^\circ$，$EF=FA$，$\angle EFA=60^\circ$，

所以 $AB=BD$，$DE=EA$，即 $ABDE$ 是筝形，故 C 与 C'、D 与 A、F 与 F' 关于直线 BE 对称，从而 $CF=C'F'$．

因为 $\angle AGB+\angle AC'B=180^\circ$，$\angle DHE+\angle DF'E=180^\circ$，

所以 A、G、B、C' 共圆，D、H、E、F' 共圆，由托勒密定理，

所以 $AB\cdot C'G=AC'\cdot BG+BC'\cdot AG$，$DE\cdot HF'=DF'\cdot HE+EF'\cdot DH$．

又 $AB=AC'=BC'$，$DE=DF'=EF'$，

所以 $C'G=BG+AG$，$HF'=HE+DH$．

所以 $C'G+GH+HF'=BG+AG+GH+DH+HE=CF=C'F'$，

即 $C'G+GH+HF'=C'F'$，故 C'、G、H、F' 四点共线，且 G、H 在线段 $C'F'$ 上．

评注 若 $AB+BC=AC$，则 A、B、C 三点共线，且点 B 在线段 AC 上．本题证明所采用的理论根据是这一事实的推广结论．

例 5 如图 3-33，四边形 $BCEF$ 内接于⊙O，其边 CE 与 BF 的延长线交于点 A，由 A 作⊙O 的两条切线 AP 与 AQ，切点分别为 P、Q，BE 与 CF 的交点为 H．求证：P、H、Q 三点共线．

证法 1 连接 BP、PF、EQ、QC，连 PQ 交 BF 于点 K，连 FQ 交 BE 于 L，连 BQ 交 FC 于 M．

因为△BPK 和△KPF 共边．

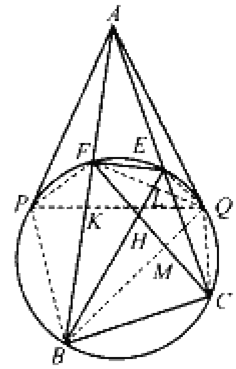


图 3-33

所以$\frac{BK}{KF}=\frac{S_{\triangle BPK}}{S_{\triangle KPF}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot PB\cdot PK\cdot \sin\angle BPK}{\frac{1}{2}\cdot PF\cdot PK\cdot \sin\angle FPK}$

$=\frac{PB\cdot \sin\angle BPK}{PF\cdot \sin\angle FPK}$.

同理，$\frac{FL}{LQ}=\frac{EF\cdot \sin\angle FEB}{EQ\cdot \sin\angle BEQ}$，$\frac{QM}{MB}=\frac{QC\cdot \sin\angle QCF}{CB\cdot \sin\angle FCB}$.

因为$\angle PAF=\angle PAB$，$\angle APF=\angle ABP$，

所以$\triangle APF\backsim\triangle ABP$，

所以$\frac{BP}{PF}=\frac{AP}{AF}$，同理，$\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}$，$\frac{QC}{EQ}=\frac{AC}{AQ}$.

又因为$\angle BPK=\angle BEQ$，$\angle FEB=\angle FCB$，$\angle QCF=\angle FPK$，且$AP=AQ$，

所以$\frac{BK}{KF}\cdot\frac{FL}{LQ}\cdot\frac{QM}{MB}=1$.

由塞瓦定理的逆定理知，PQ、BE、CF相交于一点H，即P、Q、H三点共线.

证法 2 如图 3-34，在射线AH上取一点M，使$AH\cdot AM=AB\cdot AF$，从而B、H、M、F四点共圆，C、H、M、E四点共圆.

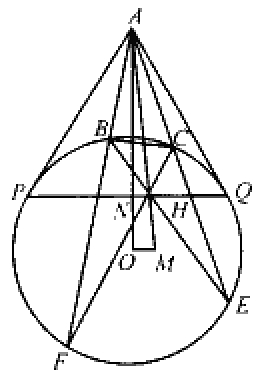


图 3-34

故$\angle FME=360°-\angle FMH-\angle EMH=(180°-\angle FMH)+(180°-\angle EMH)=\angle FBE+\angle FCE=2\angle FBE=\angle FOE$，从而$F$、$O$、$M$、$E$共圆.

所以$\angle AMO=360°-\angle AME-\angle OME=(180°-\angle AME)+(180°-\angle OME)=\angle FCE+\angle OFE=90°$.

连PQ交AO于N，交AM于H'，则$AN\cdot AO=AP^2=AB\cdot AF=AH\cdot AM$. 又$\angle H'NO=90°=\angle H'MO$，有$N$、$H'$、$M$、$O$共圆，则$AN\cdot AO=AH'\cdot AM$.

因此$AH\cdot AM=AH'\cdot AM$，即$AH=AH'$.

且H、H'均在射线AM上，故H与H'重合，H、P、Q三点共线.

评注 ①塞瓦定理的逆定理是证明三线共点的依据，但有时我们可以把三点共线的问题化为三线共点的问题来处理，证法一就是一个典型的例子.

②证法二是用"同一法". 这也是证明三点共线的一个重要方法.

例 6 如图 3-35，已知凸四边形$ABCD$内接于圆O，对角线AC、BD相交于Q. 过Q分别作直线AB、BC、CD、DA的垂线，垂足分别是E、F、G、H. 求证：EH、BD、FG三直线共点或互相平行.

证明 设 EH 与 BD 相交时，交点为 P. 直线 EHP 截 $\triangle ABD$，由梅涅劳斯定理，有$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BP}{PD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$.

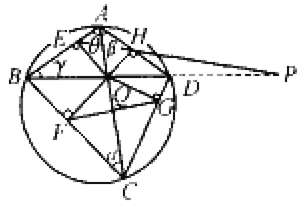


图 3-35

记$\angle BAC=\angle BDC=\theta$，$\angle DBC=\angle CAD=\beta$，$\angle ABD=\angle DCA=\gamma$，$\angle ADB=\angle ACB=\alpha$，有

$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{DH}{HA}=\frac{\tan\gamma}{\tan\theta}\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$，$\frac{CF}{FB}\cdot\frac{DG}{GC}=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\cdot\frac{\tan\gamma}{\tan\theta}$，

所以$\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BP}{PD}\cdot\frac{DG}{GC}=1$. 由梅涅劳斯定理的逆定理，$F$、$G$、$P$ 三点共线，即 EH、BD、FG 三线共点.

设 $EH/\!/BD$. 用反证法，假设 FG 与 BD 相交，则由上面的证明可知，EH 与 BD 相交于同一点，假设与上面结论矛盾. 故 $FG/\!/BD$.

评注 本题选取 EH（或 FG）与 BD 相交，充分地利用了 EH 和 FG 的地位对称性（相对于 BD 而言）. 本题是利用证三点共线来证明三线共点的. 一般意义上来说，证明三条直线 AB、CD、EF 交于一点的问题，可转化为证明 AB 与 CD 的交点 P 和点 F、E 三点共线.

例 7 两个定圆$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 交于点 A、B，一条直线过 A 点分别与两圆相交于 Y、Z，两圆在 Y、Z 处的切线相交于 X. 设$\triangle O_1O_2B$ 的外接圆为$\odot O$，直线 XB 交$\odot O$ 于另一点 Q. 求证：线段 XQ 的长度是一定值.

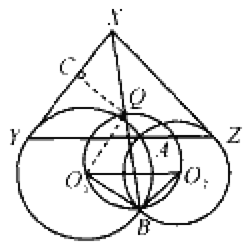


图 3-36

分析 此时线段 XQ 的长度定值等于多少，是难以发现的，实质上，有时不知道其定值对问题的解决影响不大，只要我们充分发掘图形的几何结构.

证明 连接 O_1Q.

因为$\angle XYZ=\angle ABY$，$\angle XZY=\angle ABZ$，（如图 3-36，其余情况类似证明）

所以$\angle YBZ+\angle YXZ=\angle XYZ+\angle XZY+\angle YXZ=180°$，

所以 X、Y、B、Z 四点共圆，

所以$\angle YXQ=\angle AZB=\frac{1}{2}\angle AO_2B=\angle O_1O_2B=\angle O_1QB=\alpha$，

所以 $O_1Q/\!/XY$.

过 Q 作 $QC\perp XY$ 于点 C，则 $QC=R_1$（R_1 为$\odot O_1$ 的半径），在 $\mathrm{Rt}\triangle XCQ$ 中，$XQ=\frac{QC}{\sin\alpha}=\frac{R_1}{\sin\alpha}$.

在$\triangle O_1O_2B$ 中，由正弦定理，有$\frac{O_1B}{\sin\alpha}=2R$（$R$ 为$\odot O$ 的半径），即$\frac{R_1}{\sin\alpha}=2R$. 因此 $XQ=$

$2R$(定值).

例 8 已知$\odot O$和$\odot O'$交于A、B两点,过点B任作两条直线,一条分别交$\odot O$和$\odot O'$于点P、Q,另一条分别交$\odot O$和$\odot O'$于点M、N,设PM和QN相交于点C,则$\angle C$的大小一定.

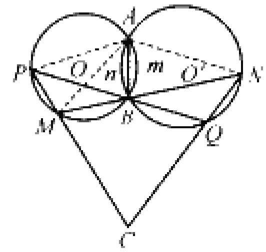


图 3-37

分析 由于有点C、A在直线PQ异侧(图 3-37)和在直线PQ同侧两种情形(图 3-38).异侧时,欲证$\angle C$大小一定,只需证$\angle BPM+\angle CQP$为定值即可.同侧时,欲证$\angle PCQ$为定值,只需证$\angle PAQ$为定值即可.

证明 当点C、A在直线PQ异侧时,连AB、AP、AM、AN.因为$\angle BPM+\angle CQP=\angle MAB+\angle BAN=180^\circ-(\angle AMN+\angle ANM)=180^\circ-\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AmB}+\overset{\frown}{AnB})$.

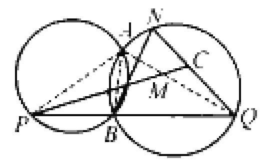


图 3-38

又因为$\overset{\frown}{AMB}+\overset{\frown}{ANB}$为定值,所以$\angle BPM+\angle CQP$为定值.

$\angle C=180^\circ-(\angle BPM+\angle CQP)$,所以$\angle C$为定值.

当点C、A在直线PQ同侧时,有$\angle APM=\angle ABM=\angle AQN$,可知$\angle PCQ=\angle PAQ$也为定值.

例 9 C为圆O上$\overset{\frown}{AB}$的中点,P为$\overset{\frown}{AMB}$上(不包括A、B)的任一点,求证:$(AP+BP):CP$为定值.

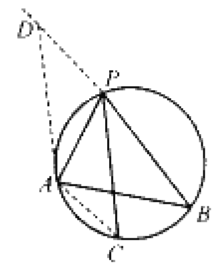


图 3-39

证明 如图 3-39,当P点运动到极限位置A点时,PA趋于 0,PB则趋于AB,此时CP趋于AC,因此定值可能为$(AP+BP):CP=AB:AC$.

连AC,延长BP到D,使$PD=AP$,连AD,在$\triangle PAC$和$\triangle DAB$中,$\angle ACP=\angle B$,PC是$\angle APB$的角平分线,又$\angle PAD=\angle ADP$,可知$\angle ADB=\angle APC$,$\triangle PAC\backsim\triangle DAB$,$DB:PC=AB:AC$.即$(AP+BP):PC=AB:AC$(定值)

评注 此题亦可连BC,由$AC=BC$及托勒密定理,得$AC\cdot PB+BC\cdot PB=AB\cdot PC$即$(PB+PA):PC=AB:AC$(定值)

例 10 如图 3-40,点A、B、C分$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$的圆周为三段弧,设X是AB弧上的一个动点,I_1、I_2为$\triangle CAX$和$\triangle CBX$的内心.证明:$\triangle XI_1I_2$的外接圆与圆O交于X之外的一个定点.

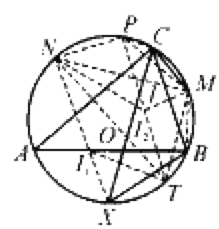


图 3-40

分析 连XI_1、XI_2并延长交圆O于N、M,则N、M为各弧的中点.设T为$\triangle XI_1X_2$的外接圆与圆O的另一交点,则要证T为定点,且I_1、I_2、T、X共圆,即只要证$\angle NXM=\angle I_1TI_2$,又$\angle NXM=\angle NTM$,因此只要证

$\angle MTI_2=\angle NTI_1$ 即可. 也可以通过证$\triangle MTI_2\backsim\triangle NTI_1$ 而得到, 由$\angle TNI_1=\angle TMI_2$ 知, 只要有$\dfrac{NT}{NI_1}=\dfrac{MT}{MI_2}$, T 点也易作出.

证明 设 M 是$\overset{\frown}{BC}$的中点, 由 I_2 为$\triangle XBC$ 的内心, 知 X、I_2、M 共线, 所以

$\angle MBI_2=\angle MBC+\angle I_2BC=\angle MXC+\angle I_2BX=\angle MXB+\angle I_2BX=\angle MI_2B$,

故 $MI_2=MB$.

设 I 为$\triangle ABC$ 的内心, 则同样得 $MI=MB$.

所以 $MI=MI_2=MC$,

即 I_2、B、C、I 在以 M 为圆心的圆上.

同理, 设 N 为$\overset{\frown}{AC}$的中点, 有 A、I_1、I、C 在以 N 为圆心的圆上.

作 $CP/\!/MN$ 交圆 O 于 P, 连 PI 与圆 O 交于 T 点, 则

$MI=MC=NP$, $MP=NC=NI$,

故四边形 $MPNI$ 为平行四边形, 因此 $S_{\triangle MPT}=S_{\triangle NPT}$,

$MP\cdot MT=AP\cdot NT$,

由 $MP=NC=NI_1$, $NP=MC=MI_2$, 得

$$\frac{NT}{NI_1}=\frac{MT}{MI_2},$$

又因为 $\angle I_1NT=\angle XNT=\angle XMT=\angle I_2MT$,

$\triangle NI_1T\backsim\triangle MI_2T$,

所以 $\angle NTI_1=\angle MTI_2$,

故 $\angle I_1XI_2=\angle NXM=\angle NTM=\angle I_1TI_2$,

即 X、I_1、I_2、T 四点共圆, 亦即 T 在$\triangle XI_1I_2$ 的外接圆上.

由于 M、N 为定点, 且 $CP/\!/MN$, 知 P 为定点, 又 I 为定点, 故 PI 与圆 O 的交点 T 也为定点.

因此对于$\overset{\frown}{AB}$上任一点 X, $\triangle XI_1I_2$ 的外接圆经过圆 O 上的定点 T.

例 11 在一个平面中, C 为一个圆周, 直线 L 是圆周的一条切线, M 为 L 上一点. 试求出具有如下性质的所有点 P 的集合: 在直线 L 上存在两个点 Q 和 R, 使得 M 是线段 QR 的中点, 且 C 是$\triangle PQR$ 的内切圆.

解法 1 设 Q、R 在直线 L 上, M 在其中点, QR 与圆周 C 切于 B 点, 将 B 与圆心 O 连起来并延长交$\odot C$ 于 D 点, 过 D 作圆的切线交 PR、PQ 于 P'、Q'点, 如图 3-41, 则 $Q'R'/\!/QR$, 连结 PD 延长交 QR 于 E, 于是有$\dfrac{Q'D}{DR'}=\dfrac{QE}{ER}$.

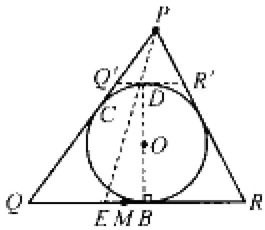


图 3-41

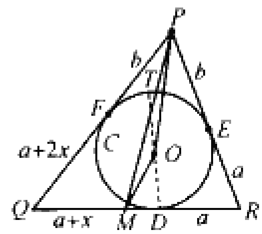


图 3-42

又△$Q'PR'$∽△QPR，⊙O 是△$Q'PR'$的旁切圆，于是 $Q'D=\frac{1}{2}(Q'R'+PR'-PQ')$，$DR'=\frac{1}{2}(Q'R'+PQ'-PR')$.

又因为 $QB=\frac{1}{2}(PQ+QR-PR)$，$BR=\frac{1}{2}(QR+PR-PQ)$，则 $\frac{Q'P}{DR'}=\frac{BR}{QB}$，于是 $QE=BR$，从而 M 为 EB 中点. 因 B、D、M 均为定点，从而 E 为定点，所以满足题意的 P 点在 ED 的延长线上(不包含 D 点)，此即 P 的集合.

解法 2 设⊙O 与△PQR 三边切点分别为 D、E、F，⊙O 的半径为 r，$MD=x$，$DR=a$，$PE=b$，则 $AQ=a+x$，$FQ=a+2x$，$S_{\triangle POM}=S_{\triangle PRM}-S_{四边形POMR}=\frac{1}{2}S_{\triangle PQR}-\frac{1}{2}r(b+a+a+x)=\frac{1}{2}rx$(定值).

设 T 是 DO 与⊙O 的另一个交点(如图 3-42)，那么 $S_{\triangle TOM}=\frac{1}{2}MD\cdot OT=\frac{1}{2}rx=S_{\triangle POM}$，所以 $PT/\!/OM$. 由于 M、O、T 均为定点，故 P 点集合为过 T 且平行于 MO 的一条射线.

例 12 给定 $\lambda>1$，设点 P 是△ABC 外接圆的弧 BAC 上的一个动点，在射线 BP 和 CP 上分别取点 U 和 V，使得 $BU=\lambda BA$，$CV=\lambda CA$，在射线 UV 上取点 Q，使得 $UQ=\lambda UV$，求点 Q 的轨迹.

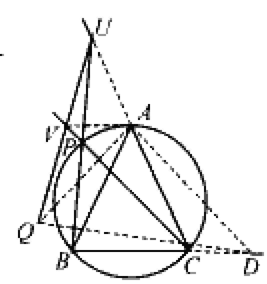


图 3-43

解 如图 3-43，连接 AU、AV、AQ，在 BC 延长线上取点 D，使 $BD=\lambda BC$，连接 AD、QD，因为 $CV=\lambda CA$，$BU=\lambda BA$，$\angle ACV=\angle ABU$，

所以△AVC∽△AUB，

所以 $\frac{AU}{AV}=\frac{AB}{AC}$，$\angle VAC=\angle UAB$，

所以 $\angle UAV=\angle BAC$，

所以△AUV∽△ABC，

所以$\frac{UV}{BC}=\frac{AU}{AB}$，$\angle AUV=\angle ABC$，

又因为$UQ=\lambda UV$，$BD=\lambda BC$，

所以$\frac{UQ}{BD}=\frac{UV}{BC}=\frac{AU}{AB}$，

所以$\triangle AUQ\backsim\triangle ABD$，$\triangle AVQ\backsim\triangle ACD$，$\triangle AQD\backsim\triangle AVC$

所以$\frac{QD}{VC}=\frac{AD}{AC}$，$QD=\frac{VC\cdot AD}{AC}=\lambda AD$.

这表明点Q位于以点D为圆心，以λAD为半径的圆上.

当点P运动到点B和点C时，割线BP和CP分别变为过点B和C的切线，这时所分别得到的点Q'和Q''即为轨迹弧的端点.

思考交流

思考题1 如图3-44，已知AB是一定圆的定直径，l是定圆过A点的切线，以l上任一点P为圆心，并过AB上的定点C作圆，交定圆于点S、T. 求证：ST过一定点.

证明 设ST和AB的交点为Q，延长BA交圆P于点R，因为$AB\perp l$，所以$AR=AC$.

因为A、S、B、T四点共圆，所以$AQ\cdot BQ=SQ\cdot TQ$.

又由R、S、C、T四点共圆，得$SQ\cdot TQ=RQ\cdot QC$.

所以$AQ\cdot BQ=PQ\cdot CQ$，

即 $AQ\cdot(AB-AQ)=(AC-AQ)\cdot(AC-AQ)$.

所以$AQ\cdot AB-AQ^2=AC^2-AQ^2$，故$AQ=\frac{AC^2}{AB}$为定值.

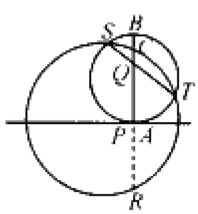


图3-44

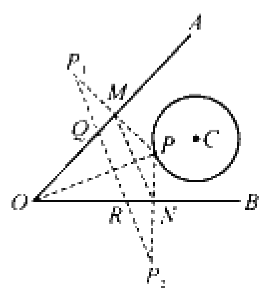


图3-45

由此可见，ST必过定圆的定直径AB上和点A的距离为$\frac{AC^2}{AB}$的一点Q.

思考题 2 在已知锐角△AOB 内有一定圆 C，试在⊙C、OA、OB 上各求一点 P、Q、R，使 $PQ+QR+RP$ 有最小值.

解 运用局部调整法，若 P 点在圆上已经确定，则应设法确定 Q、R 的位置. 如图 3-45，分别作 P 点关于 OA、OB 的对称点 P_1、P_2. 连接 P_1、P_2 与 OA、OB 分别交于 Q、R. 根据"两点之间直线最短"知，$PQ+QR+RP$ 最小.

下面确定 P 点的位置，因为 P、M、N、Q 四点共圆，且 OP 为圆的直径，所以

$$MN=\frac{1}{2}P_1P_2=\frac{1}{2}(PQ+QR+RP).$$

故当 MN 最小时，$PQ+QR+RP$ 最小，而在以 OP 为直径的圆中，由正弦定理可得 $MN=OP\cdot\sin\angle AOB$. 当 OP 最小时，MN 也最小，故 P 点应是连接 OC 的线段与⊙C 的交点.

同步检测

1. 如图 3-46，K 为△ABC 内任一点. 在△ABC 内作三条线 AL、BM、CN，使 $\angle BAL=\angle CAK$，$\angle ABM=\angle CBK$，$\angle BCN=\angle ACK$，且 $AL=AK$，$BM=BK$，$CN=CK$. 求证：K、L、M、N 四点共圆.

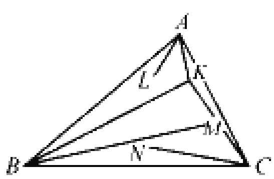


图 3-46

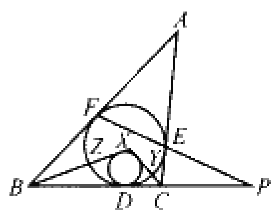


图 3-47

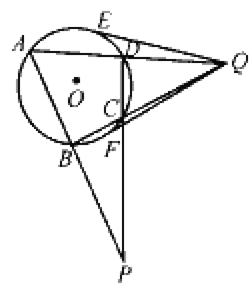


图 3-48

2. △ABC 的内切圆分别切三边 BC、CA、AB 于 D、E、F，点 X 是△ABC 的一个内点，△XBC 的内切圆也在 D 点与 BC 边相切，并与 CX、XB 分别相切于点 Y、Z，如图 3-47，求证：$EFZY$ 是圆内接四边形.

3. 如图 3-48，四边形 $ABCD$ 内接于圆，其边 AB 与 DC 的延长线交于点 P，AD 与 BC 的延长线交于点 Q，由 Q 作该圆的两条切线 QE 和 QF，切点分别为 E 和 F. 求证：P、E、F 三点共线.

4. 四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，对角线 AC 与 BD 交于 P. 如图 3-49，设△ABP、

$\triangle BCP$、$\triangle CDP$、$\triangle DAP$ 的外心分别为 O_1、O_2、O_3、O_4. 求证：OP、O_1O_3、O_2O_4 三线共点.

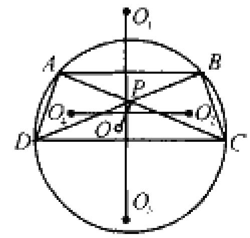


图 3-49

5. 有两个同心圆，引小圆的任意弦 AB，过点 A 引大圆的弦 $QR\perp AP$. 求证：$\triangle PQR$ 三边上的正方形面积的和是定值.

6. 在$\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上分别取点 D、E，使 $AD:CE=DB:AE$，求证：$\triangle ADE$ 的外接圆过定点.

7. 已知 $ABCD$ 是圆内接四边形，E、F 分别是 AB、CD 上的点，且满足 $AE:EB=CF:FD$，设 P 是线段 EF 上满足 $PE:PF=AB:CD$ 的点. 求证：$\triangle APD$ 和$\triangle BPC$ 的面积之比不依赖于 E、F 的选择.

8. 给定锐角 θ 和相内切的两个圆，过公切点 A 作定直线 l（不过圆心），交外接圆于另一点 B，设 M 点在外圆优弧上运动，N 是 MA 与内圆的另一交点，P 是射线 MB 上的点，使得$\angle MPN=\theta$. 试求 P 点的轨迹.

9. 如图 3-50，以 B_0 和 B_1 为焦点的给定椭圆与$\triangle AB_0B_1$ 的边 AB_i 交于 $C_i(i=0,1)$. 在 AB_0 的延长线上任取点 P_0，以 B_0 为圆心，B_0P_0 为半径作圆弧$\overset{\frown}{P_0Q_0}$交 C_1B_0 的延长线于 Q_0；以 C_1 为圆心，C_1Q_0 为半径作圆弧$\overset{\frown}{Q_0P_1}$交 B_1A 的延长线于 P_1；以 B_1 为圆心，B_1P_1 为半径作圆弧$\overset{\frown}{P_1Q_1}$交 B_1C_0 的延长线于 Q_1；以 C_0 为圆心，C_0Q_1 为半径作圆弧$\overset{\frown}{Q_1P'_0}$交 AB_0 的延长线于 P'_0. 试证：

(1)点 P'_0 与点 P_0 重合，并且圆弧$\overset{\frown}{P_0Q_0}$与$\overset{\frown}{Q_1P_0}$相内切于 P_0；

(2)四点 P_0、Q_0、Q_1、P_1 共圆.

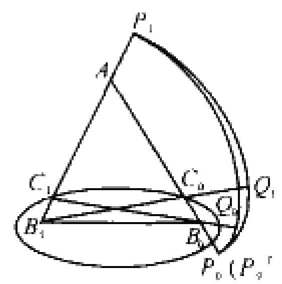


图 3-50

第四章 几何不等式与几何变换

第1讲 几何不等式

知识点金

几何问题中出现的不等式称为几何不等式.有许多几何不等式,以直观、简捷的陈述和创造性的思维方法而引人入胜.

证明几何不等式的常用方法大致有三种:几何方法、代数方法、三角方法.

1. 几何方法

用几何方法证明几何不等式,除了要用到一些几何知识外,更重要的是要掌握某些重要的几何不等式和几何极值定理.下面介绍一些重要的几何不等式.

(1)托勒密不等式 在四边形 $ABCD$ 中有 $AB\cdot CD+AD\cdot BC\geqslant AC\cdot BD$,等号当且仅当 A、B、C、D 四点共圆时成立.

证明 如图 4-1,在四边形 $ABCD$ 内取一点 E,使 $\angle BAE=\angle CAD$,$\angle ABE=\angle ACD$,则 $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$,所以 $AB\cdot CD=AC\cdot BE$.

又 $\angle BAC=\angle EAD$,$\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AC}{AD}$,所以 $\triangle ABC\backsim\triangle AED$,所以 $AD\cdot BC=AC\cdot DE$,

所以 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC(BE+DE)\geqslant AC\cdot BD$,

等号成立当且仅当点 E 在 BD 上,此时 $\angle ABD=\angle ACD$.

所以四边形 $ABCD$ 内接于圆.

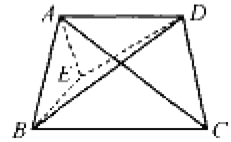


图 4-1

(2)埃尔多斯—莫德尔不等式　设 P 为$\triangle ABC$ 内任意一点,P 到三边 BC、CA、AB 的距离分别为 $PD=p$,$PE=q$,$PF=r$,并记 $PA=x$、$PB=y$、$PC=z$,则 $x+y+z\geqslant 2(p+q+r)$,等号当且仅当$\triangle ABC$ 为正三角形且 P 为三角形的中心时成立.

证明　如图 4-2,由题意得

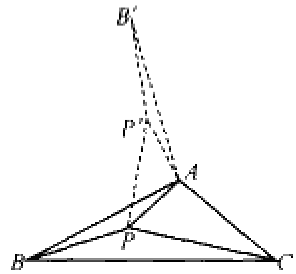


图 4-2

$\angle EPD=180°-\angle C$,由余弦定理得

$$\begin{aligned}DE&=\sqrt{p^2+q^2+2pq\cos C}\\&=\sqrt{p^2+q^2+2pq\sin A\sin B-2pq\cos A\cos B}\\&=\sqrt{(p\sin B+q\sin A)^2+(p\cos B-q\cos A)^2}\\&\geqslant\sqrt{(p\sin B+q\sin A)^2}\\&=p\sin B+q\sin A.\end{aligned}$$

又因为 P、D、C、E 四点共圆,线段 CP 为此圆直径,所以 $z=\dfrac{DE}{\sin C}\geqslant\dfrac{\sin B}{\sin C}p+\dfrac{\sin A}{\sin C}q$,

同理　$x\geqslant\dfrac{\sin B}{\sin A}r+\dfrac{\sin C}{\sin A}\cdot q$,　$y\geqslant\dfrac{\sin A}{\sin B}\cdot r+\dfrac{\sin C}{\sin B}p$.

三式相加得　$x+y+z\geqslant\left(\dfrac{\sin B}{\sin C}+\dfrac{\sin C}{\sin B}\right)p+\left(\dfrac{\sin A}{\sin C}+\dfrac{\sin C}{\sin A}\right)q+\left(\dfrac{\sin B}{\sin A}+\dfrac{\sin A}{\sin B}\right)r\geqslant 2(p+q+r)$,

等号当且仅当$\begin{cases}p\cos B=q\cos A\\r\cos B=q\cos C\\r\cos A=p\cos C\end{cases}$且 $\sin A=\sin B=\sin C$ 时成立.

即当$\triangle ABC$ 为正三角形且 p 为中心时成立.

(3)外森比克不等式　设$\triangle ABC$ 的边长和面积分别为 a、b、c 和 S,则有 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$,其中当且仅当$\triangle ABC$ 为正三角形时"="成立.

证明　$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S=a^2+b^2-a^2+b^2-2ab\cos C-2\sqrt{3}ab\sin C$

$=2a^2+2b^2-4ab\sin(c+\dfrac{\pi}{6})\geqslant 2a^2+2b^2-4ab=2(a-b)^2\geqslant 0$,

当且仅当 $a=b$ 且 $c=\dfrac{\pi}{3}$ 即$\triangle ABC$ 为正三角形时"="成立.

(4)欧拉不等式　设$\triangle ABC$ 外接圆与内切圆的半径为 R 和 r,则 $R\geqslant 2r$,当且仅当$\triangle ABC$ 为正三角形时取等号.

证明 由欧拉定理，三角形 ABC 的外接圆圆心与内切圆圆心的距离 $d=\sqrt{R(R-2r)}$，又 $d\geqslant 0$，

所以 $R-2r\geqslant 0$，即 $R\geqslant 2r$.

当且仅当 $d=0$，即内心与外心重合时取"="。

此时$\triangle ABC$ 显然为正三角形.

(5)费尔马问题 在$\triangle ABC$ 中，使 $PA+PB+PC$ 为最小的平面上的 P 点称为费尔马点，当$\angle BAC\geqslant 120°$时，A 点即为费尔马点. 当$\triangle ABC$ 内任一内角均小于 120°时，则与三边张角均为 120°时的 P 点即为费尔马点.

证明 ①当$\angle BAC=120°$时，如图 4-3，将$\triangle APB$ 绕点 A 顺时针旋转 60°至$\triangle AP'B'$位置，则易得$\triangle APP'$为正三角形.

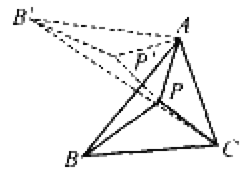


图 4-3

所以 $PP'=PA$.

所以 $PA+PB+PC=PP'+B'P'+PC\geqslant B'C$(常量).

当且仅当 B'、P'、P、C 四点共线时取"=".

因为$\angle APP'=\angle AP'P=60°$，所以$\angle APC=\angle AP'B'=120°$，即$\angle APB=120°$，

所以$\angle BPC=120°$，即当点 P 为费尔马点时取"=".

②当$\angle BAC\geqslant 120°$时，如图 4-4，将$\triangle APB$ 绕点 A 顺时针旋转 60°至$\triangle AP'B'$.

同理可得 $PA+PB+PC=PP'+B'P'+PC\geqslant B'A+AC$(定值)，

当且仅当点 P 与点 A 重合时取"=".

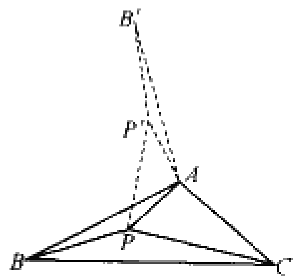


图 4-4

(6)等周定理

①周长一定的所有图形中，以圆的面积最大；反之，面积一定的所有图形中，以圆的周长最小.

②周长一定的所有 n 边形中，以正 n 边形的面积为最大；反之，面积一定的所有 n 边形中，以正 n 边形的周长为最小.

2. 代数方法

用代数方法证明几何不等式是以代数运算为主，几何处理为辅. 采取的主要手段是将几何量代数化，通过恰当的变量替换将几何不等问题转化为函数极值问题或代数不等式问题，基本思路是：(1)适当地引入变量或引入坐标系，将几何问题化为代数问题，特别是二次函数问题；(2)利用一些重要不等式和几何不等式.

3. 三角方法

三角方法实质上是一种特殊的代数方法，将几何变量用三角函数表示出来，再利用

三角函数的性质、正余弦定理、三角形的面积公式及三角不等式加以证明，需要注意的是面积不等关系的证明常常是几何不等式的重要内容，一些几何不等式常常运用面积法来处理.

例题精析

例 1 I 为$\triangle ABC$ 的内心，P 是$\triangle ABC$ 内部的一点，且满足$\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB$.

求证：$AP\geqslant AI$，并说明等号成立的充要条件是 $P=I$.

分析 本题可利用内心的性质，运用几何法证明.

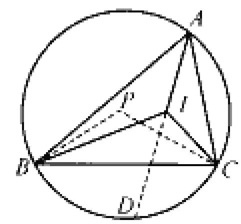


图 4-5

证明 如图 4-5，延长 AI 交$\triangle ABC$ 的外接圆于点 D，则由内心性质知：

$DB=DC=DI$.

由题意 $\angle PBC+\angle PCB=\angle PBA+\angle PCA=\frac{1}{2}[\angle PBC+\angle PCB+\angle PBA+\angle PCA]$

$=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC$，

所以$\angle BPC=180^\circ-\angle PBC-\angle PCB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC=\angle BIC$，

所以 B、P、I、C 四点共圆，即点 P 在以点 D 为圆心，DB 长为半径的圆上.

所以 $DP=DI$.

又因为 $AP+PD\geqslant AD\Leftrightarrow AP+PD\geqslant AI+ID\Leftrightarrow AP\geqslant AI$.

当且仅当 A、P、D 三点共线且 C、I、P、B 四点共圆时取"="，即当点 P 与点 I 重合时取"=".

例 2 在锐角$\triangle ABC$ 中，点 A、B、C 在边 BC、CA、AB 上的投影分别为 D、E、F，点 A、B、C 在边 EF、FD、DE 上的投影分别为 P、Q、R，记$\triangle ABC$、$\triangle PQR$、$\triangle DEF$ 的周长分别为 P_1、P_2、P_3. 求证：$P_1P_2\geqslant P_3^2$.

分析 因为 $P_1P_2\geqslant P_3^2\Leftrightarrow(AB+BC+CA)(PQ+QR+RP)\geqslant(DE+EF+FD)^2$

所以本题证明的关键是要寻找 AB、BC、CA 与 PQ、QR、RP 及 DE、EF、FD 之间的关系.

证明 如图 4-6，因为$\triangle ABC$ 是锐角三角形，

所以 P、Q、R 分别是 EF、FD、DE 内部的点，设点 E、F 分别在 AB、AC 上的投影为

K、L. 则$\angle AKL=\angle AEF=\angle ABC$，所以 $KL/\!/BC$.

又因为$\triangle AEF\backsim\triangle ABC\backsim\triangle DBF$，所以$\dfrac{AK}{KF}=\dfrac{DQ}{QF}$，所以 $KQ/\!/AD$.

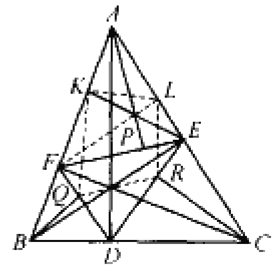


图 4-6

同理 $LR/\!/AD$. 又 $KL/\!/BC$，$AD\perp BC$，所以 $QR\geqslant KL$.

又因为$\triangle AKL\backsim\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，

所以$\dfrac{KL}{EF}=\dfrac{AK}{AE}=\cos A=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}$.

所以 $QR\geqslant KL=\dfrac{EF^2}{BC}$.

同理 $PQ\geqslant\dfrac{DE^2}{AB}$，$RP\geqslant\dfrac{FD^2}{CA}$.

由柯西不等式得

$$(AB+BC+CA)(PQ+QR+RP)\geqslant(AB+BC+CA)\left(\frac{DE^2}{AB}+\frac{EF^2}{BC}+\frac{FD^2}{CA}\right)$$

$$\geqslant(DE+EF+FD)^2,$$

即 $P_1P_2\geqslant P_3^2$.

例 3 已知$\triangle ABC$的三边长分别为 a、b、c，点 P 在$\triangle ABC$的内部，P 到三条边的距离分别为 p、q、r. 证明：$R\leqslant\dfrac{a^2+b^2+c^2}{18\cdot\sqrt[3]{pqr}}$，其中 R 为$\triangle ABC$的外接圆半径，并确定等号成立的条件.

分析 由于本题涉及到$\triangle ABC$内部一点到三边的距离，因此可以利用三角形的面积，结合代数方法解决此题.

证明 设$\triangle ABC$的面积为 S，则：

$$S=S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}+S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}(pa+qb+rc).$$

由均值不等式有

$$\sqrt[3]{pqr}=\frac{\sqrt[3]{pa\cdot qb\cdot rc}}{\sqrt[3]{abc}}\leqslant\frac{pa+qb+rc}{3\cdot\sqrt[3]{abc}}=\frac{2S}{3\sqrt[3]{abc}},$$

故只须证：$R\leqslant\dfrac{(a^2+b^2+c^2)\sqrt[3]{abc}}{12S}$.

又因为 $a^2+b^2+c^2\geqslant3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$，所以只须证 $R\leqslant\dfrac{abc}{4S}$.

而上式显然成立.

所以原不等式成立，当且仅当 $pa=qb=rc$ 且 $a=b=c$ 即 $p=q=r$ 且 $a=b=c$ 时取"="，此时△ABC 是正三角形，P 是△ABC 的中心.

例 4 已知 X 是△ABC 的边 AB 上的一点，P 为△ACX 的内心，Q 是△BCX 的内心，M 是线段 PQ 的中点.

证明：$MC>MX$.

证明 如图 4-7，由中线长公式有

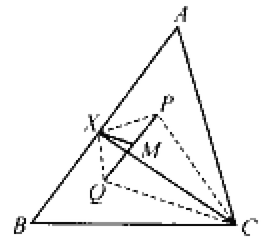


图 4-7

$$MC^2=\frac{1}{2}(CP^2+CQ^2)-\frac{1}{4}PQ^2,$$

$$MX^2=\frac{1}{2}(XP^2+XQ^2)-\frac{1}{4}PQ^2,$$

故只须证 $CP^2+CQ^2>XP^2+XQ^2$，

因为 PX 平分∠AXC，QX 平分∠BXC，

所以∠$PXQ=90°$，所以 $XP^2+XQ^2=PQ^2$.

又 $\angle PCQ=\frac{1}{2}\angle ACX+\frac{1}{2}\angle BCX=\frac{1}{2}\angle ACB<90°$，

所以 $CP^2+CQ^2>PQ^2=XP^2+XQ^2$.

所以 $MC>MX$.

评注 由于 M 是 PQ 中点，利用中线长公式表示 MX、MC，思路是很自然的，在几何证法中经常要用到三角形的三边关系，如△ABC 是锐角三角形 $\Leftrightarrow\begin{cases}AB^2<BC^2+AC^2\\AC^2<AB^2+BC^2\\BC^2<AB^2+AC^2\end{cases}$，∠$A$ 是锐角 $\Leftrightarrow BC^2>AB^2+AC^2$ 等.

例 5 已知 a、b、c 和 R 分别为三角形的三边长和外接圆半径.

证明：$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geqslant\frac{1}{R^2}$.

分析 1 由于待证式子涉及三角形三边和外接圆半径，所以易联想到正弦定理，用三角方法解决.

证法 1 要证 $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geqslant\frac{1}{R^2}$，只要证

$$\frac{1}{4R^2\sin A\sin B}+\frac{1}{4R^2\sin B\sin C}+\frac{1}{4R^2\sin C\sin A}\geqslant\frac{1}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow\sin A+\sin B+\sin C\geqslant 4\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\geqslant 4\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)\geqslant 2\sin A\sin B\sin C$$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\geqslant 2\sin A\sin B\sin C$

$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$. ①

又 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=-\frac{1}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right]\sin\frac{C}{2}$

$=-\frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant-\frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{C}{2}$.

$=-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\leqslant\frac{1}{8}$.

所以①式成立，所以所证不等式成立.

分析 2 由于左边 $=\frac{a+b+c}{abc}$，又因为 $S_\triangle=\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{abc}{4R}$（其中 r 为△ABC 内切圆半径），可直接转化为 r 和 R 的关系，从而借助欧拉不等式证明.

证法 2 $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geqslant\frac{1}{R^2}\Leftrightarrow(a+b+c)R^2\geqslant abc$

$\Leftrightarrow\frac{2S_\triangle}{r}R^2\geqslant 4R\cdot S_\triangle\Leftrightarrow R\geqslant 2r$. ②

由欧拉不等式，②式显然成立.

所以所证不等式成立.

例 6 已知平面上一个半径为 R 的定圆⊙O，A、B 是⊙O 上的两个定点，且 A、B、O 不共线，C 为异于 A、B 的点，过点 A 作⊙O_1 与直线 BC 切于点 C，过点 B 作⊙O_2 与直线 AC 切于点 C，⊙O_1 与⊙O_2 相交于点 D（异于点 C）.

求证：(1) $CD\leqslant R$；

(2) 当点 C 在⊙O 上移动，且与 A、B 不重合时，直线 CD 过一定点.

证明 (1) 如图 4-8，$\angle CAD=\angle DCB$， ①

$\angle ACD=\angle CBD$， ②

所以△DAC∽△DCB，所以 $\frac{DA}{DC}=\frac{DC}{DB}$.

即 $CD^2=DA\cdot DB$. ③

因为 $AB^2=AD^2+DB^2-2AD\cdot DB\cdot\cos\angle ADB$，

所以 $AB^2\geqslant 2AD\cdot DB\cdot(1-\cos\angle ADB)$. ④

由式③、④得 $AB^2\geqslant 2CD^2(1-\cos\angle ADB)$， ⑤

所以 $2R^2\sin^2\angle ACB\geqslant CD^2(1-\cos\angle ADB)$. ⑥

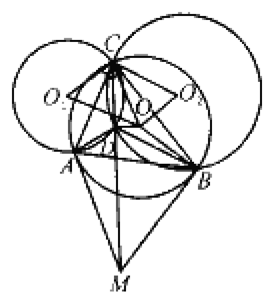


图 4-8

由式①、②得 $\angle CAD+\angle ACD=\angle DCB+\angle CBD=\angle CAD+\angle CBD=\angle DCB+$

$\angle DCA=\angle ACB$, ⑦

则 $\angle ADC=\angle BDC=180^\circ-\angle ACB$. ⑧

进一步，易得：点 C、D 位于直线 AB 的同侧

$\Leftrightarrow \angle CAD+\angle CBD<\angle CAB+\angle CBA$;

点 C、D 位于直线 AB 的两侧 $\Leftrightarrow \angle CAD+\angle CBD>\angle CAB+\angle CBA$.

所以由式⑦得：

当 $\angle ACB$ 为锐角时，点 C、D 位于直线 AB 的同侧；

当 $\angle ACB$ 为钝角时，点 C、D 位于直线 AB 的两侧.

又由式⑧得：

当 $\angle ACB$ 为锐角时，$\angle ADB=360^\circ-(\angle ADC+\angle CDB)=2\angle ACB$;

当 $\angle ACB$ 为钝角时，$\angle ADB=\angle ADC+\angle CDB=360^\circ-2\angle ACB$.

所以 $\cos\angle ADB=\cos 2\angle ACB$.

由式⑥得 $CD\leqslant R$.

(2)由前面的证明易得：

(i) CD 为 $\angle ADB$ 的平分线；

(ii)点 O、D 位于线段 AB 的同侧；

(iii) $\angle ADB=\angle AOB$.

由(ii)、(iii)可知，当点 C 在 $\odot O$ 上移动时(但 C 与 A、B 不重合)，点 D 在 $\triangle AOB$ 的外接圆的 $\overset{\frown}{AOB}$ 上移动. 所以(i)证明 CD 过定点，即 $\triangle AOB$ 的外接圆上不含点 O 的 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 M.

评注 本题运用了三角方法，关键在于借助了正、余弦定理得出⑥式，另外要注意分 $\triangle ABC$ 的形状讨论.

例 7 R 与 r 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的半径，设 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 的三个内角中最大的一个，M 是边 BC 的中点，过点 B、C 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线，交于点 X，求证：$\dfrac{r}{R}\geqslant\dfrac{AM}{AX}$.

证法 1 如图 4-9，设 O 与 I 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的外心与内心，则 O、M、X 三点共线，且 $\triangle OXC\backsim\triangle OCM$,

所以 $\dfrac{OC}{OX}=\dfrac{OM}{OC}$，又 $OC=R=OA$,

所以 $\dfrac{OA}{OM}=\dfrac{OX}{OA}$，所以 $\triangle OAM\backsim\triangle OXA$，所以 $\dfrac{AM}{AX}=\dfrac{OM}{R}$.

下面只须证明 $OM\leqslant r$.

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，O 与 I 位于 $\triangle ABC$ 内部，

所以$\angle OBM=\frac{\pi}{2}-\angle A=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C-\angle A)\leqslant\frac{1}{2}\angle B=\angle IBM$.

同理 $\angle OCM\leqslant\angle ICM$.

所以点O位于$\triangle IBC$内部或边界上.

所以$OM\leqslant r$.

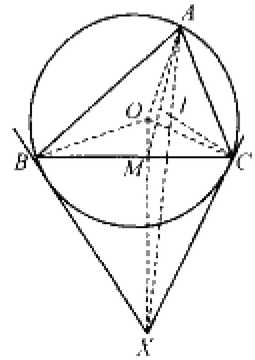


图 4-9

证法 2 设$\triangle ABC$的外心为O,不妨设$A\geqslant B\geqslant C$,易知O、M、X在同一直线上,记AX与圆O交于点D.

(1)当A、O、X不共线时,如图 4-10 易得$XB^2=XM\cdot XO=XD\cdot XA$,所以$\triangle XAM\backsim\triangle XOD$.

所以$\frac{AM}{AX}=\frac{OD}{OX}=\frac{OC}{OX}=\cos\angle COX=\cos A$.

(2)当A、O、X共线时,上式显然成立.

又$r=\frac{2s}{a+b+c}=\frac{2R\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2R\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

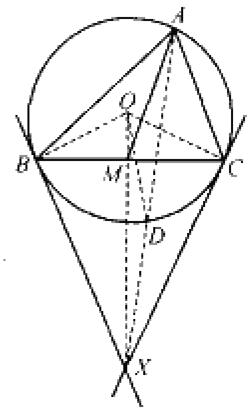


图 4-10

所以$\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos A+\cos B+\cos C-1$.

下证:$\cos B+\cos C\geqslant 1(*)$

当$B\leqslant 60^\circ$时,因为$C\leqslant B\leqslant 60^\circ$,所以$(*)$式成立;

当$B>60^\circ$时,$\cos B+\cos C\geqslant\cos B+\cos(180^\circ-2B)=\cos B-\cos 2B=\cos B(1-2\cos B)+1$.

因为$60^\circ<B<90^\circ$,所以$0<\cos B<\frac{1}{2}$,所以$\cos B(1-2\cos B)+1>1$.

综上可知$(*)$式成立.

所以$\frac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C-1\geqslant\cos A=\frac{AM}{AX}$.

评注 (1)证法一是用几何方法证明,比较简洁,但不容易想到;证法二是用三角方法证明,但必须有较强的三角知识.

(2)在用三角法解平面几何题目时,有必要熟记一些三角形中的常见三角公式,如:$\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$;$\frac{ra}{R}=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$(其中$r$、$R$分别为$\triangle ABC$的内切圆、外接圆半径,$ra$表示$\triangle ABC$与边$BC$相切的旁切圆半径);$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2+2\cos A\cos B\cos C$;$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C$,$\cos A+\cos B+\cos C=1+$

$4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$等.

例 8 四边形 $ABCD$ 内接于圆,若 $AB\cdot BC=2AD\cdot DC$,求证:$8BD^2\leqslant 9AC^2$.

证明 作 $BM\perp AC$ 于 M,作 $DN\perp AC$ 于 N,如图 4-11.

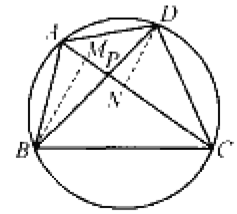


图 4-11

因为 $BM\cdot AC=2S_{\triangle ABC}=AB\cdot BC\sin\angle ABC$

$=2AD\cdot DC\cdot\sin(\pi-\angle ABC)=2AD\cdot DC\cdot\sin\angle ADC$

$=4S_{\triangle ADC}=2DN\cdot AC$,

所以 $BM=2DN$.

设 AC 交 BD 于点 P,易知$\triangle BMP\backsim\triangle DNP$,

则 $BP=2DP$,$BD=3DP$.

由相交弦定理得$\frac{2}{9}BD^2=\frac{2}{3}\cdot BD\cdot\frac{1}{3}BD=BP\cdot DP=AP\cdot PC\leqslant\frac{1}{4}(AP+PC)^2=\frac{1}{4}AC^2$

所以 $8BD^2\leqslant 9AC^2$,当且仅当 P 为 AC 的中点时"="成立.

评注 本题的已知条件 $AB\cdot BC=2AD\cdot DC$,与三角形的面积公式有紧密联系,因此利用了面积作工具得出 $BM=2DN$ 这个结论.

例 9 如图 4-12,设$\triangle ABC$ 内存在一点 F,使得$\angle AFB=\angle BFC=\angle CFA$,直线 BF、CF 分别交 AC、AB 于 D、E.求证:$AB+AC\geqslant 4DE$.

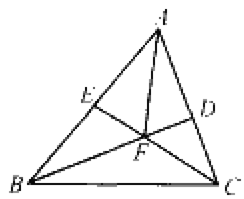


图 4-12

分析 点 F 为费尔马点,AB、AC 的长均可以用 AF、BF、CF 表示,只需将 DE 的长用 AF、BF、CF 表示,即可转化为代数不等式的证明.

证明 设 $AF=x$,$BF=y$,$CF=z$.

因为$\angle AFE+\angle AFD=\angle BFE+\angle AFE=120^\circ$,

$\angle CFD+\angle DFA=\angle BFE+\angle DFA=120^\circ$,

所以$\angle AFE=\angle AFD=60^\circ$,$\angle BFE=\angle CFD=60^\circ$.

又 $S_{\triangle ACF}=S_{\triangle ADF}+S_{\triangle CDF}$,

所以$\frac{1}{2}xz\sin120^\circ=\frac{1}{2}x\cdot DF\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}z\cdot DF\cdot\sin60^\circ$,

即 $DF=\frac{xz}{x+z}$,同理 $EF=\frac{xy}{x+y}$.

所以要证 $AB+AC\geqslant 4DE$,

只要证 $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\geqslant$

$4\sqrt{\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2+\left(\frac{xz}{x+z}\right)^2+\frac{xy}{x+y}\cdot\frac{xz}{x+z}}$

因为 $x+y\geqslant\frac{4xy}{x+y}, x+z\geqslant\frac{4xz}{x+z}$,

所以只要证 $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\geqslant\sqrt{(x+y)^2+(x+y)(x+z)+(x+z)^2}$,

只要证 $2\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}\geqslant x^2+2(y+z)x+yz$,

平方后化简可得 $3(x^2-yz)^2\geqslant 0$.

即知原不等式成立.

例 10　已知四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 既有外接圆又有内切圆,内切圆与边 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、A_4A_1 分别切于点 B_1、B_2、B_3、B_4. 求证:$\left(\frac{A_1A_2}{B_1B_2}\right)^2+\left(\frac{A_2A_3}{B_2B_3}\right)^2+\left(\frac{A_3A_4}{B_3B_4}\right)^2+\left(\frac{A_4A_1}{B_4B_1}\right)^2\geqslant 8$.

证明　如图 4-13,设四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切圆半径为 r,记 $\angle A_1A_2A_3=2\alpha$, $\angle A_2A_3A_4=2\beta$, $\angle A_3A_4A_1=2\gamma$, $\angle A_4A_1A_2=2\theta$.

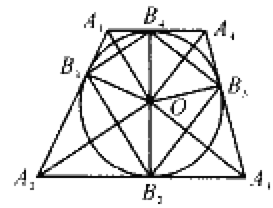


图 4-13

因为 A_1、A_2、A_3、A_4 四点共圆.

所以 $\alpha+\gamma=\frac{\pi}{2}, \beta+\theta=\frac{\pi}{2}$.

又 O 为内切圆圆心,所以 $OB_2\perp A_2A_3$, $OB_1\perp A_1A_2$, $OA_2\perp B_1B_2$.

所以 $\angle B_1B_2O=\angle B_2A_2O=\alpha$,所以 $B_1B_2=2\gamma\cos\alpha$.

同理　$B_2B_3=2\gamma\cos\beta, B_3B_4=2r\cos\gamma, B_4B_1=2r\cos\theta$.

则 $A_1A_2=A_1B_1+B_1A_2=r\cot\theta+r\cot\alpha$.

同理　$A_2A_3=r\cot\alpha+r\cot\beta$,

$A_3A_4=r\cot\beta+r\cot\gamma$,

$A_4A_1=r\cot\gamma+r\cot\theta$,

所以原不等式等价于 $\left[\frac{r(\cot\theta+\cot\alpha)}{2r\cos\alpha}\right]^2+\left[\frac{r(\cot\alpha+\cot\beta)}{2r\cos\beta}\right]^2+\left[\frac{r(\cot\beta+\cot\gamma)}{2r\cos\gamma}\right]^2+\left[\frac{r(\cot\gamma+\cot\theta)}{2r\cos\theta}\right]^2\geqslant 8$

$\Leftrightarrow\left[\frac{\tan\beta+\cot\alpha}{\cos\alpha}\right]^2+\left(\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\cos\beta}\right)^2+\left(\frac{\tan\alpha+\cot\beta}{\sin\alpha}\right)^2+\left(\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\sin\beta}\right)^2\geqslant 32$

$\Leftrightarrow\frac{\cos^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cos^2\beta}+\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2\beta\cos^2\beta\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta}+\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2\beta\cos^2\beta\cos^2\alpha}\geqslant 32$

$\Leftrightarrow\frac{\cos^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant 32$

$\Leftrightarrow \frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant 32.$

因为 $\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta\geqslant 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta$,

$\sin^2\beta\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\beta\geqslant 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta$,

所以只需证 $\frac{8\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant 32$

$\Leftrightarrow 4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\leqslant 1$

$\Leftrightarrow \sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta\leqslant 1.$

显然成立，故原不等式成立.

评注

(1)本题是用三角方法证明的，关键是借助于三角函数表示线段的长，运用类似的思路可以解决以下两题：

题1 (第12届IMO)M 为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上任一点，r_1、r_2、r 分别为 $\triangle AMC$、$\triangle BMC$、$\triangle ABC$ 的内切圆半径，ρ_1、ρ_2、ρ 分别为这个三角形的旁切圆的半径(在 $\angle ACB$ 内部). 求证：$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}=\frac{r}{\rho}$.

题2 (第44届IMO预选题)Γ_1、Γ_2、Γ_3、Γ_4 分别为四个不同的圆，且 Γ_1 与 Γ_3 外切于 P，Γ_2 与 Γ_4 也外切于点 P. 假设 Γ_1 与 Γ_2、Γ_2 与 Γ_3、Γ_3 与 Γ_4、Γ_4 与 Γ_1 分别交于异于点 P 的点 A、B、C、D.

证明：$\frac{AB\cdot BC}{AD\cdot DC}=\frac{PB^2}{PD^2}$.

(2)既有内切圆，又有外接圆的四边形，称为双心四边形，双心四边形有很多性质，有兴趣的读者可以参阅《中等数学》2002年第1期.

思考交流

思考题1 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R=1$，内切圆半径为 r，它的垂足三角形 $A'B'C'$ 的内切圆半径为 P，求证：$P\leqslant 1-\frac{1}{3}(1+r)^2$.

证明 设 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆半径为 R'，则由九点圆性质知 $R'=\frac{1}{2}R=1$.

由欧拉不等式 有 $r\leqslant\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}$，$P\leqslant\frac{1}{2}R'=\frac{1}{4}$.

所以 $\frac{1}{3}(1+r)^2\leqslant\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$，所以 $1-\frac{1}{3}(1+r)^2\geqslant\frac{1}{4}\geqslant P$.

即知原不等式成立.

评注

(1)本题证明利用了九点圆性质和欧拉不等式,使证明过程大大简化.

(2)三角形三边的中点,三条高线的垂足,垂心与顶点连线的中点,这九个点共圆,此圆叫三角形的九点圆,九点圆有以下性质:

(i)三角形的九点圆的半径等于三角形外接圆的半径的一半.

(ii)三角形的九点圆圆心在"欧拉线"上.

(iii)三角形的外心、重心、九点圆圆心、垂心分别为 O、G、K、H,则 $OG=GK=KH=2:1:3$.

思考题 2 已知 $ABCD$ 是凸四边形,求证:$S_{四边形ABCD}\leqslant\dfrac{AB^2+BC^2+CD^2+DA^2}{4}$.

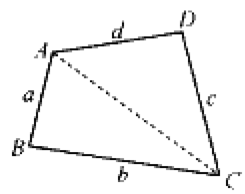


图 4-14

证明 如图 4-14,设 $AB=a$,$BC=b$,$CD=c$,$DA=d$,则 $2S_{四边形ABCD}=2S_{\triangle ABC}+2S_{\triangle ACD}=ab\sin B+cd\sin D$,

所以 $4S^2_{四边形ABCD}=a^2b^2\sin^2B+c^2d^2\sin^2D+2abcd\sin B\sin D$.

又 $a^2+b^2-2ab\cos B=AC^2=c^2+d^2-2cd\cos D$,

则 $\dfrac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4}=a^2b^2\cos^2B+c^2d^2\cos^2D-2abcd\cos B\cos D$,

所以 $4S^2_{四边形ABCD}+\dfrac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4}=a^2b^2+c^2d^2-2abcd\cos(B+D)$,

所以 $4S^2_{四边形ABCD}\leqslant a^2b^2+c^2d^2+2abcd=(ab+cd)^2$,

所以 $2S_{四边形ABCD}\leqslant ab+cd\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}+\dfrac{c^2+d^2}{2}$,

所以 $S_{四边形ABCD}\leqslant\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$.

评注 本题采用了三角证法,有关四边形问题的解决经常借助三角形的正、余弦定理,类似地可解决下题.

设 $ABCD$ 为凸四边形,$AB=7$,$BC=4$,$CD=5$,$DA=6$,其面积 S 的取值范围是$[a,b]$,则 $a+b=$________.

同步检测

1. 求证：如图 4-15，三角形的三条中线的和大于其三边之和的$\frac{3}{4}$倍.

2. 如图 4-16，在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$\angle ABC=120°$，$\angle ABD=30°$. 求证：(1) $c\geqslant a+b$；(2) $\left|\sqrt{c+a}-\sqrt{c+b}\right|=\sqrt{c-a-b}$.

3. 如图 4-17，已知点 K、L、M、N 分别在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 上. 设 $S_1=S_{\triangle AKN}$，$S_2=S_{\triangle BKL}$，$S_3=S_{\triangle CLM}$，$S_4=S_{\triangle DMN}$，$S=S_{四边形ABCD}$.

求证：$\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2}+\sqrt[3]{S_3}+\sqrt[3]{S_4}\leqslant 2\sqrt[3]{S}$.

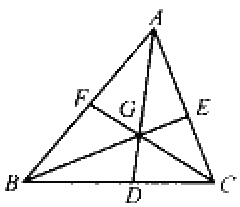


图 4-15

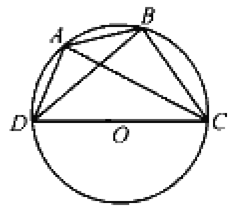


图 4-16

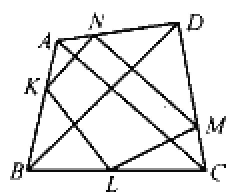


图 4-17

4. 如图 4-18，已知凸四边形 $ABCD$ 的面积为 1，求证：顶点分别为 AC、AD、BD、BC 的中点的四边形的面积小于$\frac{1}{2}$.

5. 求证：在任意三角形中，不等式$\frac{\cos\alpha}{a^3}+\frac{\cos\beta}{b^3}+\frac{\cos\gamma}{c^3}\geqslant\frac{3}{2abc}$成立，其中 a、b、c 是三角形的三边长，α、β、γ 分别是各边所对的内角.

6. 已知$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，周长为 P，面积为 S，求$\frac{SP}{R^3}$的最大值.

7. 如图 4-19，记$\triangle ABC$ 的内切圆分别切 AB、BC、CA 于 P、Q、R，求证：$\frac{BC}{PQ}+\frac{CA}{QR}+\frac{AB}{RP}\geqslant 6$.

8. 如图 4-20，C_1、C_2 为同心圆，圆 C_2 的半径为圆 C_1 的两倍，四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于圆 C_1，分别延长 A_4A_1、A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4 交圆 C_2 于 B_1、B_2、B_3、B_4. 求证：四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的周长 L' 不小于四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的周长 L 的 2 倍，并指出"="成立的条件.

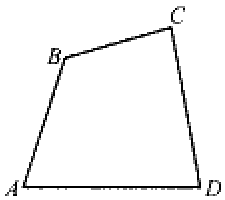


图 4-18

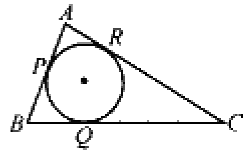


图 4-19

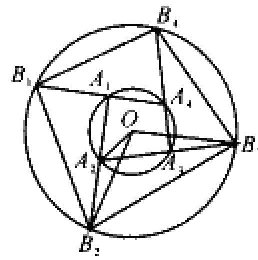


图 4-20

9. P 是 $\triangle ABC$ 内一点，求证：$\angle PAB$、$\angle PBC$、$\angle PCA$ 中至少有一个小于或等于 $30°$.

10. $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 内的旁切圆与 BC、CA、AB 分别切于点 A_1、B_1、C_1，$\angle B$ 内的旁切圆与 BC、CA、AB 分别切于点 A_2、B_2、C_2，$\angle C$ 内的旁切圆与 BC、CA、AB 分别切于点 A_3，B_3、C_3. 求 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$ 的周长之和与 $\triangle ABC$ 的外接圆半径之比的最大值.

第 2 讲　几何变换

知识点金

德国科学家克莱因在 1872 年提出，平面几何是研究平面图形在运动、变化过程中的不变性质和不变量的科学，而几何变换作为一种现代的数学思想方法，正是采用运动、变化的观点来研究平面几何的. 首先，它用"运动"的方法去处理几何对像——通过平移、旋转、反射、相似等手法把几何对象"变换"到所需的位置或变为所需的图形，使问题得到解决；其次，通过巧妙地运用运动（变换）不变性，可以得到许多特殊的结论. 因此，几何变换已经成为解决平面几何问题的一个极为有力的工具，运用几何变换解决平面几何问题，往往能在很大程度上简化我们的思维过程，且如果将几何变换与传统方法有机地结合起来，则这种效果更加突出，中学常见的变换有合同变换、相似变换.

1. 合同变换

保持两点距离不变的变换.

(1)基本性质

合同变换具有下列性质：

①合同变换的逆变换仍是合同变换；

②连续进行两次合同变换所得的结果仍是合同变换；

③在合同变换下共线点变为共线点，共点线变为共点线，射线变为射线，角变为相等的角，三角形与其他几何变形变为同它全等的几何图形. 由此可见，在合同变换下，图形的形状大小均不变.

(2)合同变换的三种特殊形式

①平移变换

设 $\boldsymbol{a}$ 为已知向量，T 是平面上的变换，如果对于任一双对应点 P、P'，总有 $\overrightarrow{PP'}=\boldsymbol{a}$，那么 T 叫作平移变换，记为 $T(\boldsymbol{a})$，其中 $\boldsymbol{a}$ 的方向叫作平移方向，$|\boldsymbol{a}|$ 叫作平移距离.

在平移变换下，直线变成与它平行（或重合）的直线，线段 AB 变为线段 $A'B'$，且 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$，在 $T(\boldsymbol{a})$ 变换下，点 A 变为 A'，图形 F 变为 F'，可表示为 $A\xrightarrow{T(\boldsymbol{a})}A'$，$F\xrightarrow{T(\boldsymbol{a})}F'$.

②旋转变换

设 O 为平面上一定点，θ 为有向角，R 为平面上的变换，对于任意一双对应点 P、P'，总有 $OP=OP'$，$\angle POP'=\theta$，那么变换 R 叫作以 O 为旋转中心，θ 为旋转角的旋转变换，记作 $R(O,\theta)$，其中有向角 $\angle POP'$ 规定方向是始边 OP 向 OP' 旋转方向，一般取逆时针方向为正.

与平移变换类似，旋转变换记为 $F \xrightarrow{R(O,\theta)} F'$. 在旋转变换下，(i)若直线 $AB \xrightarrow{R(O,\theta)} A'B'$，且 P 分 AB 所成比与 P' 分 $A'B'$ 所成比相等，则 $P \xrightarrow{R(O,\theta)} P'$；(ii)若直线 $l \xrightarrow{R(O,\theta)} l'$，则 l' 与 l' 所成有向角为 θ.

③反射变换

设 l 是平面上一定直线，S 是平面上的变换，P、P' 为一双对应点，若线段 PP' 被 l 平分，则 S 叫作反射变换，记作 $S(l)$，两对应点的变换用 $A \xrightarrow{s(l)} A'$ 表示.

2. 相似变换

若在两个圆形 F 与 F' 之间，满足：F 上任意两点 A、B 的距离与其在 F' 上的对应点 A'、B' 的距离之比 $\dfrac{A'B'}{AB}=k$，($k>0$ 为常数)，则对称图形 F 与 F' 为相似形，而把 F 变为 F' 的这种变换就称为"相似变换".

在相似变换下，共线点对应于共线点，射线对应于射线，角对应于角，三角形对应于三角形，且对应角相等，对应三角形相似.

若在相似变换下，对应图形 F 与 F' 的任一双对应点 P 与 P' 的连线均通过平面上同一定点 O，且 $OA'=OA=k$($k\neq 0$ 的常数)，则称 F 与 F' 为位似图形，定点 O 称为位似中心，常数 k 称为位似比，当 F 与 F' 的对应点的排列顺序相同时，F 和 F' 称为外位似图形($k>0$，O 为外位似中心)；当 F 和 F' 上对应点的排列顺序相反时，F 和 F' 为内位似图形($k<0$，O 为内位似中心). 如图 4-21.

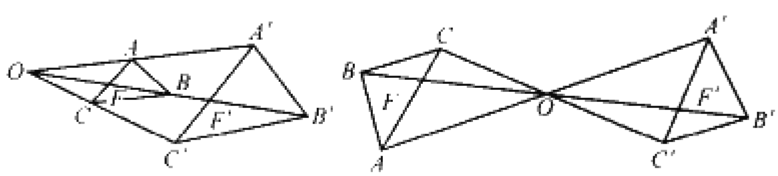


图 4-21

位似变换是一种特殊的相似变换，它除了具备相似变换的各种性质外，最为明显的性质是变换前后不经过位似中心的对应线段平行. 这一性质常被用来证明线段平行.

例题精析

例 1 若$\triangle ABC$的外接圆的圆心为O，A'是边BC的中点，AA'与外接圆交于点A''，$A'Q_a\perp AO$，点Q_a在AO上，过点A''的外接圆的切线与$A'Q_a$相交于P_a，用同样的方式，可以构造点P_b和P_c. 求证：P_a、P_b、P_c三点共线.

证明 如图 4-22，把$\triangle ABC$位似变换到$\triangle A'B'C'$，$\triangle ABC$的重心为位似中心，位似比为$-\frac{1}{2}$，此时AO变成了$A'N$，其中N是九点圆的圆心.

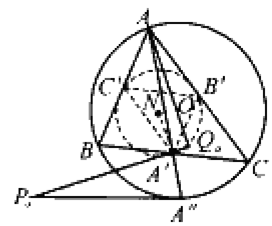


图 4-22

所以$A'N\,/\!/\,AO$，$A'P_a\perp A'N$.

所以$A'P_a$是九点圆的切线.

易知$\angle OAB+\angle C=90°$，不妨设$AB\leqslant AC$，

则$\angle BAA'+\angle A'AO+\angle C=90°$

又$\angle P_aA''A'=\angle BAA'+\angle C$，$\angle P_aA'A''=90°-\angle A'AO$，

所以$\angle P_aA''A'=\angle P_aA'A''$，所以$A'P_a=A''P_a$.

所以P_a在$\odot O$与九点圆的根轴上.

同理，P_b、P_c在$\odot O$与九点圆的根轴上.

故P_a、P_b、P_c三点共线.

评注

(1)先证P_a在某一定直线上，再说明另二点也在该线上，这也是证明三点共线的常用方法. 尤其是像本题P_b、P_c就是同理作出的，更常采用这种方法.

(2)三角形和它的中点三角形是以重心为位似中心，$-\frac{1}{2}$为位似比的位似形. 此时三角形的外心与九点圆圆心是一对对应点. 这一结论要能掌握.

例 2 点O是锐角$\triangle ABC$的外心，分别以$\triangle ABC$的三边的中点为圆心作过点O的圆，这三个圆两两异于O的交点分别是K、L、M. 求证：点O是$\triangle KLM$的内心.

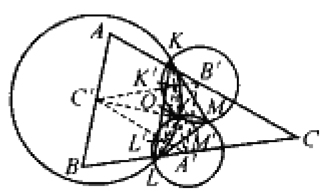


图 4-23

证明 设A'、B'、C'分别是边BC、CA、AB的中点. 如图 4-23.

因为$OA'\perp BC$，$B'C'\,/\!/\,BC$.

所以$OA'\perp B'C'$.

同理 $OB'\perp A'C'$.

所以点O是$\triangle A'B'C'$的垂心.

又因为 $B'C'$ 是 KO 的中垂线，

所以 KO 的中点是 K' 是点 O 在 $B'C'$ 上的射影.

设 LO 和 MO 的中点分别为 L'、M'.

则 $\triangle K'L'M'$ 是 $\triangle A'B'C'$ 的重足三角形，

所以点 O 是 $\triangle K'L'M'$ 的内心.

又 $\triangle KLM$ 与 $\triangle K'L'M'$ 位似，位似中心为 O，位似比为 2，所以点 O 是 $\triangle KLM$ 的内心.

评注 本题的证明运用了锐角三角形的垂心是它的垂足三角形的内心这个结论.

例 3 已知点 A、B、C 在某平面上，设 D、E、F、G、H、I 是同一平面上的点，且使得 $\triangle ABD$、$\triangle BAE$、$\triangle CAF$、$\triangle DFG$、$\triangle ECH$、$\triangle GHI$ 是正定向等边三角形. 求证：点 E 是线段 AI 的中点.

分析 题中有很多定向等边三角形，因此可以利用旋转变换证明.

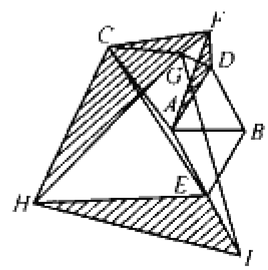


图 4-24

证明 如图 4-24 所示的情形，点 A、B、C 的位置改变时可类似地证明. 在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle CGF$ 中，有

$AF=CF$，$DF=GF$，$\angle DFG=\angle AFC=60°$，

所以 $\triangle ADF \xrightarrow{R(F,-60°)} \triangle CGF$.

同理 $HC=HE$，$HG=HI$，$\angle CHE=\angle GHI=60°$

所以 $\triangle HCG \xrightarrow{R(H,-60°)} \triangle HEI$.

又 $AD \xrightarrow{R(A,\ 120°)} AE$.

所以 $AE=AD=CG=EI$，且 AE 和 EI 与 AD 的夹角都等于 120°（顺时针），即 A、E、I 三点共线，即知点 E 是线段 AI 的中点.

例 4 如图 4-25，圆 ω_1、ω_2 的圆心分别为 O_1、O_2，两圆相交于点 A、B，由点 A 分别向圆 ω_1、ω_2 作切线 l_1、l_2. 点 T_1、T_2 分别位于圆 ω_1、ω_2 上，使得 $\angle T_1O_1A=\angle AO_2T_2$，圆 ω_1 上过点 T_1 的切线与 l_2 相交于点 M_1，圆 ω_2 上过点 T_2 的切线与 l_1 相交于点 M_2，证明：线段 M_1M_2 的中点位于一条不依赖于点 T_1、T_2 位置的直线上.

证明 以 A 为中心，作系数为 $k(k>0)$ 的同位相似，将圆 ω_1 变为与圆 ω_2 相等的圆 ω'_1. 用带撇的同一字母（连同原来的下标）表示各个点和各条直线在该变换之下的象. 设 B_1 是圆 ω_2 与圆 ω'_1 的（不同于 A）第二个交点. 圆 ω'_1 与圆 ω_2 关于直线 AB_1 互相对称. 在此对称之下，T'_1 变为 T_2，l'_1 变为 l_2，M'_1 变为 M_2.

所以 $AM_2=AM'_1=KAM_1$（K 不依赖于点 T_1 和 T_2 的位置）.

所以不论点 T_1、T_2 的位置如何变化，所得的 $\triangle AM_1M_2$ 都彼此为同位相似（因为 M_2、

M_1 分别位于直线 l_1、l_2 上，它们都经过点 A，且位于直线 AB_1 的不同侧，而比值 $AM_2:AM_1$ 为常数）. 由此即知，线段 M_1M_2 的中点位于一条固定的经过点 A 的直线上.

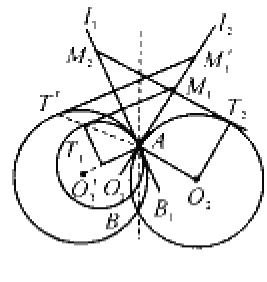


图 4-25

评注 本题的证明实质是反射变换与位似变换这两种变换的结合.

例 5 将 $\triangle ABC$ 的外接圆记作 Ω，点 P 在圆周 Ω 上. 将 $\triangle ABC$ 的分别与边 BC、CA 相切的旁切圆的圆心记作 I_A、I_B. 求证：$\triangle I_ACP$ 和 $\triangle I_BCP$ 的外心连线的中点就是圆 Ω 的圆心.

证明 如图 4-26，设线段 I_AI_B 的中点为 M.

由题意 $AI_A\perp AI_B$，所以 $MA=\frac{1}{2}I_AI_B$.

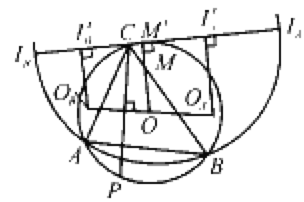


图 4-26

同理 $MB=\frac{1}{2}I_AI_B$.

所以 M 是四边形 AI_BI_AB 的外接圆圆心，所以 $\angle AI_AB=\frac{1}{2}\angle AMB$.

又 $\angle AI_AB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC)-\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\angle ACB$，

所以 $\angle AMB=\angle ACB$.

所以点 A、B、C、M 都在圆周 Ω 上.

因为 $AM=MB$，则点 M 是该圆周上弧 $\overset{\frown}{ACB}$ 的中点.

设 I'_A、I'_B、M' 分别是线段 CI_A、CI_B、CM 的中点.

则点 I'_A、I'_B、M' 分别是点 O_A、O_B、O 在直线 I_AI_B 上的投影（其中 O_A、O_B、O 分别是 $\triangle I_ACP$、$\triangle I_BCP$、$\triangle ABC$ 的外心），点 O_A、O_B、O 都在线段 CP 的中垂线上.

所以要证题目结论，只须证明 M' 是线段 $I'_AI'_B$ 的中点，因为点 M 是线段 I_AI_B 的中点，而点 I'_A、I'_B、M' 可以由点 I_A、I_B、M 以点 C 为中心作同位相似得到，位似系数为 $\frac{1}{2}$.

评注 为证 O 是 O_AO_B 中点，只需证 M' 是 $I'_AI'_B$ 中点，而利用位似变换，只需证 M 是 I_AI_B 中点，而这结论比较容易证明. 从此题又可以体会到利用几何变换证题的简便之处.

例 6 如图 4-27，正方形 $ABCD$ 在 $\odot O$ 的内部，圆 O_1 切圆 O 于 A'，同时与直线 AB 和 AD 相切，圆 O_2、O_3、O_4 都以类似的定义给出，B'、C'、D' 分别为圆 O_2、O_3、O_4 与 $\odot O$ 的切点. 求证：直线 AA'、BB'、CC'、DD' 共点.

证明 过圆心 O 作 AB、AD 的垂线，如图 4-28，分别交圆 O 于 P、M、N、Q，再分别过 P、Q、M、N 作圆 O 的切线，构成一个正方形，记为 $A''B''C''D''$.

因为圆 O_1 与圆 O 关于点 A' 位似，

所以 A'、A、A''共线.

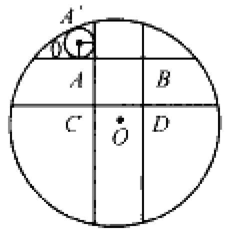


图 4-27

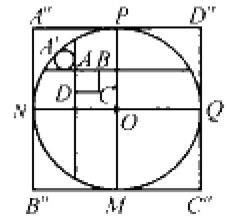


图 4-28

同理 B'、B、B''共线;C'、C、C''共线;D'、D、D''共线.

又因为正方形 $ABCD$ 与正方形 $A''B''C''D''$位似.

所以 AA''、BB''、CC''、DD''过其位似中心.

所以 $A'A$、BB'、CC'和 DD'共点.

例 7 在边长为 a、b、c,各边所对的内角为 α、β、γ 的$\triangle ABC$ 内有点 P 和 Q,使得$\angle BPC=\angle CPA=\angle APB=120°$,$\angle BQC=60°+\alpha$,$\angle CQA=60°+\beta$,$\angle AQB=60°+\gamma$.求证:$(AP+BP+CP)^3\cdot AQ\cdot BQ\cdot CQ=(abc)^3$.

证明 设$\triangle CBD$ 是经过$\triangle ABC$ 的边 BC 向外构造的等边三角形,将$\triangle BPC$ 绕点 B 顺时针旋转 $60°$至$\triangle BED$.

即$\triangle BPC\xrightarrow{R(B,\ -60°)}\triangle BED$,如图 4-29.

易得$\triangle BEP$ 是正三角形.

因为$\angle APB+\angle BPE=120°+60°=180°$,

$\angle PEB+\angle BED=60°+120°=180°$.

所以 A、P、E、D 四点共线.

所以 $AP+BP+CP=AP+PE+ED=AD$. ①

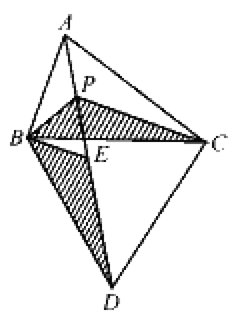


图 4-29

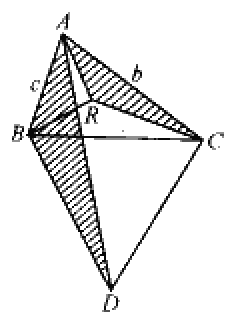


图 4-30

令 R 是$\triangle ABC$ 内的一点,且使得$\triangle ARC\backsim\triangle ABD$,如图 4-30 所示,则$\angle RAC=$

$\angle BAD<\alpha$，$\angle RCA=\angle BDA=\angle BCP<\gamma$，

$$\frac{AR}{AC}=\frac{AB}{AD}, \qquad ②$$

$\angle ARC=\angle ABD=60^\circ+\beta$.

所以$\triangle ABR\backsim\triangle ADC$，$\angle ARB=\angle ACD=60^\circ+\gamma$.

由$\angle ARB=60^\circ+\gamma=\angle AQB$和$\angle ARC=60^\circ+\beta=\angle AQC$，得$R=Q$，

由①和②得 $\dfrac{AQ}{b}=\dfrac{c}{AP+BP+CP}$，

即$(AP+BP+CP)\cdot AQ=bc$. 同理$(AP+BP+CP)\cdot BQ=ca$，$(AP+BP+CP)\cdot CQ=ab$.

三式相乘得$(AP+BP+CP)^3AQ\cdot BQ\cdot CQ=(abc)^2$.

评注 本题证明过程中实质上用到了旋转变换和位似变换的复合，也叫位似旋转变换.

例 8 $\triangle ABC$中，$AC=BC$，I为其内心，设P是$\triangle AIB$的外接圆在$\triangle ABC$内部的圆弧上一点，过P分别平行于CA和CB的直线交AB于点D和E，过P平行于AB的直线交CA于F、交CB于G. 证明：直线DF与直线EG的交点在$\triangle ABC$的外接圆上.

证明 如图 4-31，

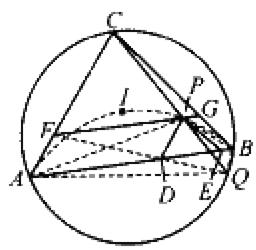


图 4-31

因为$\triangle PDE$与$\triangle CFG$的对应边互相平行，且DF与EG不平行.

所以这两个三角形是位似的，

故$\triangle PDE$与$\triangle CFG$是位似的.

所以DF、EG、CP交于一点，即位似中心.

下证：若CP交$\triangle ABC$外接圆于点Q，则Q是DF与EG的交点.

因为$\angle AQP=\angle ABC=\angle BAC=\angle DFC$.

所以A、Q、P、F四点共圆.

所以$\angle FQP=\angle FAP$，又$\angle IBA=\frac{1}{2}\angle CBA=\frac{1}{2}\angle CAB=\angle IAC$，

所以CA与$\triangle AIB$的外接圆切于点A.

所以$\angle PAF=\angle DBP$.

由$\angle QBD=\angle QCA=\angle QPD$得$D$、$Q$、$B$、$P$四点共圆，

所以$\angle DBP=\angle DQP$.

所以$\angle FQP=\angle PAF=\angle DBP=\angle DQP$，

所以F、D、Q三点共线.

同理 G、E、Q 三点共线.

所以 DF、EG、CP 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于同一点 Q.

例 9 四边形 $ABCD$ 外切于圆，$\angle A$ 和 $\angle B$ 的外角平分线相交于点 K，$\angle B$ 和 $\angle C$ 的外角平分线相交于点 L，$\angle C$ 和 $\angle D$ 的外角平分线相交于点 M，$\angle D$ 和 $\angle A$ 的外角平分线相交于点 N，设 $\triangle ABK$、$\triangle BCL$、$\triangle CDM$、$\triangle DAN$ 的垂心分别为 K_1、L_1、M_1、N_1. 求证：四边形 $K_1L_1M_1N_1$ 是平行四边形.

证明 如图 4-32.

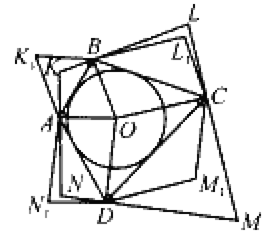


图 4-32

将四边形 $ABCD$ 的内心记作 O.

由题意 $OA\perp NK$，$OB\perp KL$.

因为 $AK_1\perp KB$，$OB\perp KB$，

所以 $AK_1 /\!/ OB$.

同理 $BK_1 /\!/ OA$，

所以四边形 $AOBK_1$ 是平行四边形.

所以点 K_1 可以由点 A 平移 $\overrightarrow{AK_1}=\overrightarrow{OB}$ 得到.

同理点 L_1 可由点 C 平移一个向量 $\overrightarrow{OB}$ 得到.

所以 $\overrightarrow{K_1L_1}=\overrightarrow{AC}$，同理 $\overrightarrow{N_1M_1}=\overrightarrow{AC}$.

所以四边形 $K_1L_1M_1N_1$ 是平行四边形.

例 10 两圆外切于点 A，且内切于另一 $\odot\Gamma$ 于点 B、C. 令 D 为小圆内公切线割 Γ 的弦的中点. 求证：当 B、C、D 不共线时，A 是 $\triangle BCD$ 的内切圆的圆心.

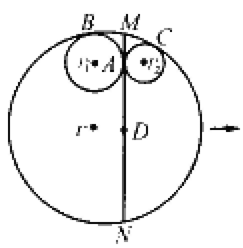
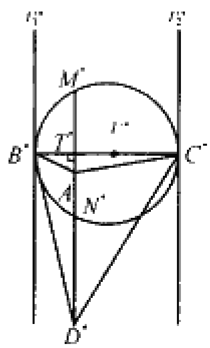


图 4-33


图 4-34

证明 以 A 为反演中心，r（r 为任意正实数）为反演半径作圆 4-33 的反演得到圆 4-34. 其中 $\odot\Gamma_1$、$\odot\Gamma_2$ 成为两条平行的（$\odot\Gamma'$ 的）切线 Γ_1'、Γ_2'，直线 $MADN$ 反演后成为一条平行于 Γ_1' 的直线，D' 在 $\odot\Gamma'$ 外.

欲证 A 为 $\triangle BCD$ 的内切圆圆心，只须证 A 到 BC、CD、BD 的距离相等，且 A 在 $\triangle BCD$ 的内部，即 $\triangle AB'C'$，$\triangle AB'D'$、$\triangle AC'D'$ 的外接圆半径相等，由正弦定理可

知，只须证明$\angle AB'C'=\angle AD'C'$，$\angle AC'B'=\angle AD'B'$.

由圆幂定理有 $\left(\frac{AM-AN}{2}\right)^2=AD^2-AM\cdot AN$.

则$\frac{1}{4}\left(\frac{AM'+AN'}{AM'\cdot AN'}\right)^2-\left(\frac{1}{AD'}\right)^2=\frac{1}{AM'\cdot AN'}$.

即$\left(\frac{AM'-AN'}{2AM'\cdot AN'}\right)^2=\left(\frac{1}{AD'}\right)^2$

故 $AD'=\frac{2AM'\cdot AN'}{AM'-AN'}=\frac{AM'\cdot AN'}{AT'}$，

所以$AD'\cdot AT'=AM'\cdot AN'$.

则 $AT'\cdot D'T'=AM'\cdot AN'+AT'^2=M'T'\cdot N'T'=B'T'\cdot C'T'$.

故 $\frac{AT'}{T'C'}=\frac{T'B'}{T'D'}$，即$\tan\angle AB'C'=\tan\angle AD'C'$.

因为$\angle AB'C'$、$\angle AD'C'\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$\angle AB'C'=\angle AD'C'$.

同理 $\angle AC'B'=\angle AD'B'$.

所以原命题成立.

评注 本题的证明运用了反演变换，反演变换是平面几何中的一类非常重要的几何变换，它的具体性质读者可自己翻阅萧振纲教授著的《几何变换》一书.

思考交流

思考题 1 $\triangle ABC$的一个旁切圆与边BC相切于点A'，过点A'作$\angle A$平分线的平行直线a，再分别类似地作出直线b和c. 求证：直线a、b、c相交于同一点.

证明 如图 4-35，设$\triangle ABC$的内切圆分别与它的各条边相切于点A_1、B_1、C_1. 经过A_1作$\angle A$平分线的平行直线a_1.

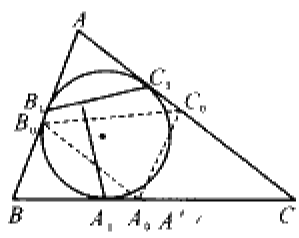


图 4-35

因为$\triangle AB_1C_1$是等腰三角形，

所以$\angle A$的平分线垂直于B_1C_1，所以$a_1\perp B_1C_1$.

即a_1经过$\triangle A_1B_1C_1$的边B_1C_1上的高.

设$\triangle ABC$的各边中点分别为A_0、B_0、C_0.

因为$\triangle A_0B_0C_0$与$\triangle ABC$同位相似，相似比为$\frac{1}{2}$.

所以$\angle A$的平分线与$\angle A_0$的平分线平行，记$\triangle A_0B_0C_0$的内心为S.

易知点 A' 与点 A_1 与边 BC 中点 A_0 等距.

作关于点 S 的对称变换,此时直线 a_1 变为直线 a,在这个变换之下,$\triangle A_1B_1C_1$ 的各条高线分别变到直线 a、b、c 之上.因此,这三条直线相交于同一点,且该点是$\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心关于点 S 的对称点.

思考题 2 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,在$\triangle ABC$ 的外侧作等腰$\triangle DAC$、$\triangle EAB$、$\triangle FBC$,且 $DA=DC$、$EA=EB$、$FB=FC$,$\angle ADC=2\angle BAC$,$\angle BEA=2\angle ABC$,$\angle CFB=2\angle ACB$.设 D' 是直线 DB 与 EF 的交点,E' 是 EC 与 DF 的交点,F' 是 FA 与 DE 的交点,求$\frac{DB}{DB'}-\frac{EC}{EE'}+\frac{FA}{FF'}$的值.

解 因为$\triangle ABC$ 是锐角三角形,则$\angle ADC$、$\angle BEA$、$\angle CFB<\pi$.

所以$\angle DAC=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\angle ADC=\frac{\pi}{2}-\angle BAC$,

$\angle BAE=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\angle BEA=\frac{\pi}{2}-\angle ABC$.

所以$\angle DAE=\angle DAC+\angle BAC+\angle BAE=\pi-\angle ABC<\pi$.

同理 $\angle EBF<\pi$,$\angle FCD<\pi$.

所以六边形 $DAEBFC$ 是凸六边形.

且$\angle ADC+\angle BEA+\angle CFB=2(\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB)=2\pi$.

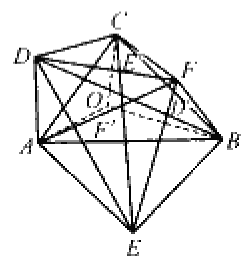


图 4-36

设 ω_1、ω_2、ω_3 分别是以 D、E、F 为圆心,DA、EB、FC 为半径的圆.由$\angle ADC+\angle BEA+\angle CFB=2\pi$,知这三个圆共点,设该点为 O,如图 4-36,则 O 是 C 关于 DF 的对称点.同理,O 也是 A 关于 DE、B 关于 EF 的对称点,

所以$\frac{DB}{DD'}=\frac{DD'+D'B}{DD'}=1+\frac{D'B}{DD'}=1+\frac{S_{\triangle EFB}}{S_{\triangle EFD}}=1+\frac{S_{\triangle EFO}}{S_{\triangle DEF}}$.

同理 $\frac{EC}{EE'}=1+\frac{S_{\triangle DFO}}{S_{\triangle DEF}}$,$\frac{FA}{FF'}=1+\frac{S_{\triangle DEO}}{S_{\triangle DEF}}$.

则 $\frac{DB}{DD'}+\frac{EC}{EE'}+\frac{FA}{FF'}=3+\frac{S_{\triangle DEF}+S_{\triangle ODF}+S_{\triangle ODE}}{S_{\triangle DEF}}=4$.

评注 本题实质应用了对称变换的思想方法.

同步检测

1. 如图 4-37,四边形 $ABCD$ 外切于圆 ω,边 AB 和 CD 所在的直线相交于点 O,圆 ω_1 与边 BC 相切于点 K,且与边 AB 和 CD 所在的直线都相切;圆 ω_2 与边 AD 相切于点 L,

且亦与边 AB 和 CD 所在的直线都相切，现知点 O、L、K 共线，试证：边 BC 和 AD 的中点以及圆 ω 的圆心三点共线.

2. 如图 4-38，给定两个圆，其中一个圆在另一个内部，且两圆相切于点 N. 外圆的弦 BA 和 BC 分别与内圆相切于点 K 和 M. 设不包含点 N 的弧$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{BC}$的中点分别是 Q 和 P. $\triangle BQK$ 和$\triangle BPM$ 的外接圆的第二个交点为 B_1. 求证：BPB_1Q 为平行四边形.

3. 如图 4-39，$ABCDEF$ 是一个凸六边形，P、Q、R 分别是直线 AB 与 EF、EF 与 CD、CD 与 AB 的交点，S、T、U 分别是 BC 与 DE、DE 与 FA、FA 与 BC 的交点，求证：若 $AB:RP=CD:QR=EF:PQ$，则 $BC:US=DE:ST=FA:TU$.

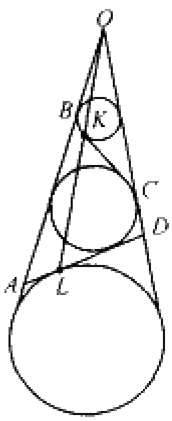


图 4-37

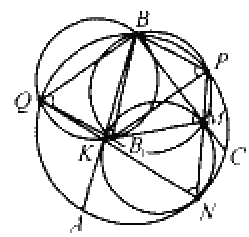


图 4-38

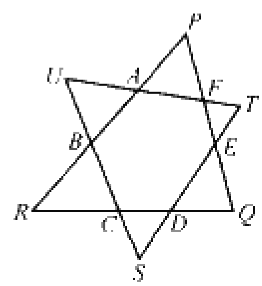


图 4-39

4. 如图 4-40，$ABCD$ 为圆内接四边形，AB 与 CD 交于 E，AD 与 BC 交于 F，AC 与 EF 交于 M，求证：M 为 EF 的中点的充要条件是 $MC\cdot MA=ME^2$.

5. 如图 4-41，一个大正方形内有一个小正方形 $PQRS$，延长 PQ、QR、RS、SP 与大正方形依次交于 A、B、C、D. 求证：$AC\perp BD$ 且 $AC=BD$.

6. 如图 4-42，在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=40°$，$\angle ABC=60°$，D 和 E 分别是边 AC 和 AB 上的点，使得$\angle CBD=40°$，$\angle BCE=70°$，F 是直线 BD 和 CE 的交点，求证：$AF\perp BC$.

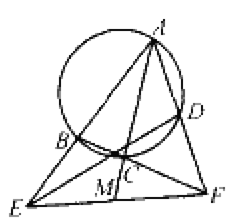


图 4-40

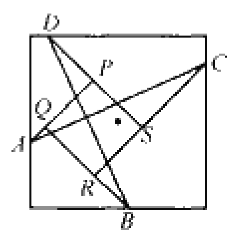


图 4-41

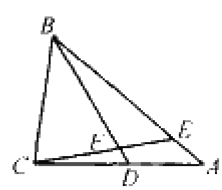


图 4-42

7. 如图 4-43，$\triangle ABC$ 的外心为 O，M 和 N 分别为边 AB 和 BC 上的点，且 $2\angle MON$

$=\angle BOC$，求证：$\triangle AMN$ 的周长不小于边 BC 的长.

8. 如图 4-44，O 是凸四边形 $ABCD$ 的两对角线的交点，求证：$\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 的重心的连线与 $\triangle BOC$ 和 $\triangle DOA$ 的垂心的连线互相垂直.

9. 如图 4-45，M 为等腰直角 $\triangle ABC$ 的直角边 AC 的中点，过直角顶点 A 作 BM 的垂线交边 BC 于 D. 求证：$\angle CMD=\angle AMB$.

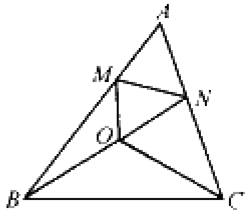


图 4-43

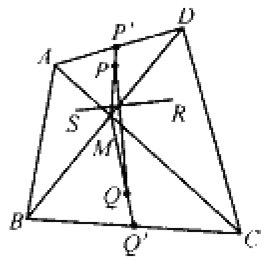


图 4-44

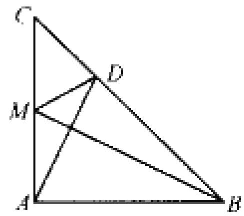


图 4-45

10. 如图 4-46、4-47，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，CD 是角平分线，过 $\triangle ABC$ 的外心作 CD 的垂线交 AC 于 E，过 E 作 CD 的平行线交 AB 于 F，求证：$AE=FD$.

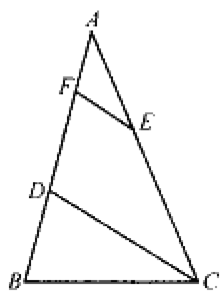


图 4-46

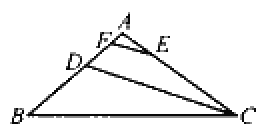


图 4-47

第五章　平面几何中常用的解题方法

知识点金

1. 三角函数法

利用正弦定理、余弦定理将平面几何中的边角关系相互转化，通过三角函数的变形公式达到证题的目的.

2. 解析法

建立适当坐标系，引进某角作为参数，用其表示点的坐标、曲(直)线方程，然后通过三角处理使问题获解.

3. 复数法

由于复数与平面上的点存在着一一对应关系，所以诸如规则图形(正方形、等腰直角三角形、矩形、圆)等的几何问题，可通过建立坐标系即复平面，利用复数方法求解.

4. 向量法

规定了大小和方向的量称为向量，其大小称为模，用$|a|$表示，这样，平面几何问题可用“数形结合”的方法而求证.

5. 几何法

所谓几何法，就是根据平面几何的定义、定理，通过演绎推理来证明(或计算)平面几何问题的方法，这是解决平面几何问题的常用方法.

6. 变换法

常见的初等几何变换有反射、平移、旋转、位似等等，应用几何变换的思想处理几何问题，可以化繁为简，迅速找到解题思路.

7. 面积法

面积方法实际上是借助于面积公式的一种计算方法. 由于面积既有代数的意义，又

有几何的含义，因此在几何证明中面积方法占有特别重要的地位.

例题精析

例 1 在直角$\triangle ABC$中，AD是斜边BC上的高，过$\triangle ABD$的内心与$\triangle ACD$的内心的直线分别交边AB和AC于K和L，$\triangle ABC$和$\triangle AKL$的面积分别记为S和T. 求证：$S \geqslant 2T$.

证明 （几何法）如图 5-1，将$\triangle ABD$和$\triangle ACD$的内心分别记为M，N. 由于$\triangle ABD \backsim \triangle CAD$，故有对应线段之比等于相似比，即

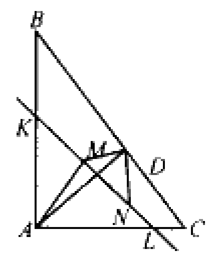


图 5-1

$DM : DN = BD : AD$.

又$\angle MDN = \angle BAC = 90°$，

故有$\triangle ABD \backsim \triangle NMD$，

从而对应边的交角相等，即

$\angle LKA = \angle BDM = 45°$.

这表明$\triangle ALK$是等腰直角三角形.

又因为$\triangle AMK \cong \triangle AMD$，

所以 $AK = AD = AL$，

于是得面积

$$2T = AK \cdot AL = AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 + AC^2} \leqslant \frac{AB^2 \cdot AC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = S，即 S \geqslant 2T.$$

例 2 如图 5-2，$\odot O_1$与$\odot O_2$和$\triangle ABC$的三边所在直线相切，E、F、G、H为切点，且EG和FH的延长线交于P点，求证：$PA \perp BC$.

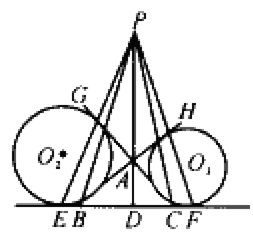


图 5-2

证明 证法 1（三角函数法）：记$BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，p是$\triangle ABC$的半周长，易知$BE = CF = p - a$，$\angle PEF = 90° - \frac{C}{2}$，$\angle PFE = 90° - \frac{B}{2}$.

在$\triangle PBE$和$\triangle PCF$中，连结PB、PC，

$$PB^2 = PE^2 + BE^2 - 2PE \cdot BE\cos\left(90° - \frac{C}{2}\right),$$

$$PC^2 = PF^2 + CF^2 - 2PF \cdot CF\cos\left(90° - \frac{B}{2}\right).$$

在$\triangle PEF$中，由正弦定理，得

$$\frac{PE}{\sin\left(90^\circ-\frac{B}{2}\right)}=\frac{EF}{\sin\angle EPF}=\frac{b+c}{\sin\frac{B+C}{2}}=\frac{PF}{\sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)}.$$

所以 $PE^2-PF^2=\left[\frac{b+c}{\sin\frac{B+C}{2}}\right]^2\left[\sin^2\left(90^\circ-\frac{B}{2}\right)-\sin^2\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)\right]$

$$=\frac{(b+c)^2}{\sin^2\frac{B+C}{2}}\left(\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}\right)$$

$$=\frac{(b+c)^2}{\sin\frac{B+C}{2}}\cdot\sin\frac{C-B}{2}.$$

故 PB^2-PC^2

$$=\frac{(b-c)^2}{\sin\frac{B+C}{2}}\cdot\sin\frac{C-B}{2}-2(p-a)\cdot\frac{b+c}{\sin\frac{B+C}{2}}\cdot\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+2(p-a)\cdot\frac{b+c}{\sin\frac{B+C}{2}}\cdot\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=\frac{(b+c)^2}{\sin\frac{B+C}{2}}\cdot\sin\frac{C-B}{2}-2\cdot\frac{(b+c)(p-a)}{\sin\frac{B+C}{2}}\cdot\sin\frac{C-B}{2}$$

$$=\frac{(b+c)\sin\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}\cdot[(b+c)-2(p-a)]$$

$$=\frac{a(b+c)\sin\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}=\frac{a(b+c)(\sin C-\sin B)}{\sin(B+C)}=c^2-b^2$$

$=AB^2-AC^2$.

延长PA交BC于D，记$\angle PDB=\alpha$，$\angle PDC=\beta$.

则由余弦定理，得 $PB^2=PD^2+BD^2-2PD\cdot BD\cos\alpha$.

$PC^2=PD^2+CD^2-2PD\cdot CD\cos\beta$，

$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\alpha$，

$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\beta$，

从而$(PD\cdot CD-AD\cdot CD)\cos\beta=(PD\cdot BD-AD\cdot BD)\cos\alpha$.

又$\alpha+\beta=\pi$，由上述易知$\alpha=90^\circ$，即$PA\perp BC$.

证法 2 (解析法):以 E 为原点,EF 所在直线为 x 轴,建立直角坐标系(图 5-3).

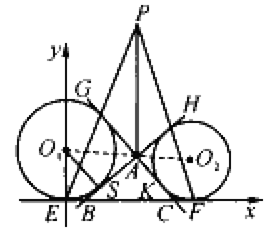


图 5-3

由条件,易知 $EB=CF$.设$\odot O_1$ 的半径为 R,$\odot O_2$ 的半径为 r,B 点坐标为$(b,0)$,C 点坐标为$(c,0)$,则 F 点坐标为$(b+c,0)$,O_1 点坐标为$(0,R)$,O_2 点坐标为$(b+c,r)$,于是$\odot O_1$ 的方程为

$x^2+(y-R)^2=R^2$,即

$x^2+y^2-2Ry=0$. ①

$\odot O_2$ 的方程为$[x-(b+c)]^2+(y-r)^2=r^2$,即

$x^2+y^2-2(b+c)x-2ry+(b+c)^2=0$. ②

EG 是$\odot O_1$ 关于点 C 的切点弦,其方程为

$cx+0\cdot y-2R\cdot\dfrac{y+0}{2}=0$,即 $cx-Ry=0$. ③

FH 是$\odot O_2$ 关于点 B 的切点弦,其方程为

$bx+0\cdot y-2(b+c)\cdot\dfrac{x+b}{2}-2r\cdot\dfrac{y+0}{2}+(b+c)^2=0$,即

$cx+ry-c(b+c)=0$. ④

由③、④,得交点 P 的横坐标为 $x_P=\dfrac{R(b+c)}{R+r}$,连结 O_1O_2 必过 A 点,连结 O_2H,O_1S,则有$\triangle AO_1S\backsim\triangle AO_2H$,得$\dfrac{O_1A}{AO_2}=\dfrac{O_1S}{O_2H}=\dfrac{R}{r}$.

由定比分点坐标公式得 A 点的横坐标为

$$x_A=\frac{0+\frac{R}{r}(b+c)}{1+\frac{R}{r}}=\frac{R(b+c)}{R+r}.$$

所以 $x_P=x_A$,

所以 PA 垂直于 x 轴,即 $PA\perp BC$.

例 3 如图 5-4,在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,D 是 BC 中点,$DE\perp AC$ 于 E,F 是 DE 中点.求证:$AF\perp BE$.

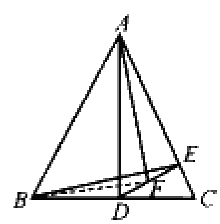


图 5-4

证明 证法 1(三角函数法):连结 BF,记 $AB=AC=a$,$\angle ABC=\alpha$,则$\angle ADE=\alpha$,$AD=a\sin\alpha$,$AE=AD\sin\alpha=a\sin^2\alpha$,$DF=FE=\dfrac{1}{2}DE=\dfrac{1}{2}a\sin\alpha\cos\alpha$.

在$\triangle BDF$ 中,$BF^2=BD^2+DF^2-2BD\cdot DF\cos(90^\circ+\alpha)$.

所以 $BF^2-DF^2=BD^2-2BD\cdot DF\cos(90^\circ+\alpha)$

$$=a^2\cos^2\alpha-2a\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}a\sin\alpha\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)$$

$$=a^2\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha).$$

又 $AB^2-AE^2=a^2-a^2\sin^4\alpha=a^2(1-\sin^4\alpha)=a^2\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha)$，

所以 $AB^2-AE^2=BF^2-FE^2$.

同例 2 的证法一中最后几步，易证 $AF\perp BE$.

证法 2 （向量法）：如图 5-5，连结 AD.

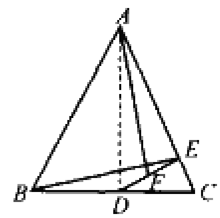


图 5-5

因为 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AF}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})$

$$=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\right)\cdot\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}\right)\cdot\overrightarrow{CE}$$

$$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{CE}.$$

又由 $AD\perp BC$，得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

由 $DE\perp AC$，得 $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{CE}=0$.

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}$

$$=-|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{CE}|+\overrightarrow{DE}\cdot(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC})$$

$$=-|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{CE}|+|\overrightarrow{DE}|^2=0.$$

所以 $AF\perp BE$.

例 4 已知 A 为平面上两半径不等的 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的一个交点，外公切线 P_1P_2 的切点 P_1，P_2，另一条外公切线的切点为 Q_1，Q_2. M_1，M_2 分别为 P_1Q_1，P_2Q_2 的中点. 求证：$\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$.

证明 如图 5-6，由于图形关于直线 O_1O_2 对称，故 P_1Q_1，P_2Q_2 以及公共弦 AB 均垂直于 O_1O_2，故 M_1，M_2 在 O_1O_2 上，又由外公切线的性质，易证 $\triangle P_1O_1M_1\backsim\triangle P_2Q_2M_2$. 设两圆公共弦交 P_1P_2 于 C，则 $P_1C^2=CA\cdot CB=CP_2^2$，即 $P_1C=CP_2$，所以 AB 平分 M_1M_2.

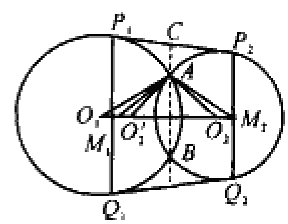


图 5-6

现以 AB 为反射轴将 $\triangle O_2AM_2$ 反射到 $\triangle O'_2AM_1$，则 O'_2 在 O_1O_2 上，且 $AO_2=AO'_2$，$\angle O'_2AM_1=\angle O_2AM_2$.

因为 $\dfrac{AO_1}{O_1M}=\dfrac{P_1O_1}{O_1M_1}=\dfrac{P_2O_2}{O_2M_2}=\dfrac{AO_2}{O_2M_2}=\dfrac{AO'_2}{O'_2M_1}$，

所以 AM_1 平分 $\angle O_1AO'_2$.

所以 $\angle O_1AM_1=\angle O'_2AM_1=\angle O_2AM_2$.

所以 $\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$，得证.

评注 本例利用反射变换将两角$\angle O_1AM_2$与$\angle O_2AM_2$集中到一个三角形内，条件集中，从而使问题得以顺利解决.

例 5 是否任意一个正$2n$边形都可以分解为若干个菱形？

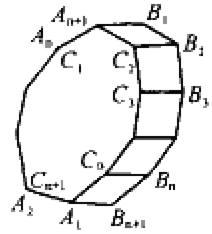


图 5-7

解 我们证明一个更广的结论，即任意一个正$2n$边形当它的各对对边平行时都可以分解成为若干个菱形.

当$n=2$时，因为等边四边形本身就是菱形，所以结论成立.

设结论对某个$n\geqslant 2$成立，并设正$2(n+1)$边形$A_1A_2\cdots A_{n+1}B_1B_2\cdots B_{n+1}$满足所设的条件. 设点$C_1=A_{n+1}, C_2, \cdots, C_n, C_{n+1}=A_1$是点$B_1, B_2, \cdots, B_n, B_{n+1}$沿向量$\overrightarrow{B_{n+1}A_1}$的方向平移而得到的点(如图 5-7)，则

$B_iC_i=B_{n+1}A_1=B_iB_{i+1}, i=1,2,\cdots,n.$

由于所有B_iC_i是平行的，所以四边形$C_iB_iB_{i+1}C_{i+1}$都是菱形，并且$A_nC_1=C_1C_2=\cdots=C_nA_1$，$C_iC_{i+1}\parallel B_iB_{i+1}\parallel A_iA_{i+1}$，因此$2n$边形$A_1A_2\cdots A_nC_1\cdots C_n$满足所设的条件. 由归纳法假设，它可以分解为若干个菱形，从而正$2(n+1)$边形$A_1A_2\cdots A_{n+1}B_1B_2\cdots B_{n+1}$也可分解为若干个菱形，结论证毕.

评注 本题是利用平移变换将问题转化化归，从而有效求解的.

例 6 在正方形$ABCD$的内部作等边三角形ABK、BCL、CDM和$\triangle DAN$. 证明四线段KL、LM、MN、NK的中点和八线段AK、BK、BL、CL、DM、CM、DN、AN的中点是一个正十二边形的 12 个顶点(如图 5-8).

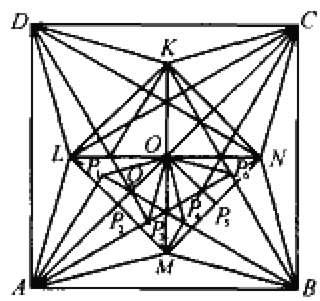


图 5-8

证明 记正方形的中心为O，记AK, LM, AN, BL, MN, BK, $\cdots$, DM的中点为$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_{12}$. 由已知条件知

(1)AC、BD、KM、LN都是图形的对称轴；

(2)绕O旋转90°的任一倍数角，图形保持不变.

现将图形顺时针旋转90°，则AM变为DL，故有$DL\perp AM$. 在等腰$\triangle DAM$中，DL也是角平分线，有

$\angle LDA=\frac{1}{2}(90^\circ-60^\circ)=15^\circ.$

由对称性，进而得

$\angle LAD=\angle MAB=\angle MBA=\cdots=\angle KCD=\angle KDC=15^\circ.$

从而知，$\triangle AML$、$\triangle BMN$、$\triangle CNK$、$\triangle DKL$为全等的正三角形，记其边长为$2a$.

在$\triangle ACK$中，OP_1为中位线，有$OP_1 \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}KC=a$.

$\angle P_1OP_2=\angle KCA=30^\circ$，$\angle P_1OL=\angle KCD=15^\circ$.

又在$\triangle LMN$中，OP_2是中位线，$OP_2=\frac{1}{2}MN=a=OP_1$.

由图形关于 AC 对称知，$OP_3=OP_2$，$\angle P_2OP_3=30°$.

再由图形关于 OM 对称知，$OP_4=OP_5=OP_6=a$，且

$\angle P_3OP_4=2\times 15°=30°$，$\angle P_4OP_5=\angle P_5OP_6=30°$.

最后由图形关于 LN 对称知，12 个点 $P_1,P_2,\cdots,P_{12}$ 均匀分布在以 O 为圆心，以 a 长为半径的圆周上，即

$OP_1=OP_2=\cdots=OP_{12}=a$.

$\angle P_1OP_2=\angle P_2OP_3=\cdots=\angle P_{12}OP_1=30°$.

所以，$P_1,P_2,\cdots,P_{12}$ 是一个正十二边形的 12 个顶点.

评注 本题是利用旋转变换，抓住图形的对称性给予证明的.

例 7 已知三个等圆有一个公共点 O，并且都在一个已知三角形内，每一个圆与三角形的两边相切，求证：这个三角形的内心、外心与点 O 三点共线.

证明 将三个等圆的圆心分别记为 A',B',C'. 连结 $A'B',B'C',C'A'$，则显然有 $A'B'\parallel AB$，$B'C'\parallel BC$，$C'A'\parallel CA$，所以 $\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$.

连结 AA',BB',CC' 并延长，则此三线恰为 $\triangle ABC$ 的三条内角平分线，于是三线交于一点 O'. 显然，O' 即是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的内心，又是两者的位似中心(如图 5-9).

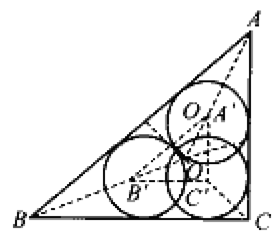


图 5-9

O 点作为三等圆的公共点，当然有 $OA'=OB'=OC'$，即 O 为 $\triangle A'B'C'$ 的外心. 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O''，则两个三角形的位似中心 O' 与二者各自的外心 O''、O 三点共线，即 $\triangle ABC$ 之内心、外心与 O 三点共线. 证毕.

评注 本题是利用位似变换给予证明的.

例 8 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=60°$，过该三角形的内心 I 作直线平行于 AC 交 AB 于 F，在 BC 上取点 P，使 $3BP=BC$，求证：$\angle BFP=\frac{1}{2}\angle B$.

证明 如图 5-10，(复数法) 记 $\overrightarrow{PF}=z$，$|\overrightarrow{BI}|=a$，则内切圆半径 $r=a\sin\frac{B}{2}$，$z_F=a\cos\frac{B}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}a\sin\frac{B}{2}$.

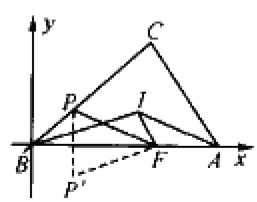


图 5-10

$\cot 60°=a\left(\cos\frac{B}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{B}{2}\right)$.

$$|\overrightarrow{BC}|=a\cos\frac{B}{2}+a\sin\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}$$

$$=\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\cdot a=\frac{\sqrt{3}a}{2\sin\frac{C}{2}},$$

所以 $z_P=\frac{1}{3}z_C=\frac{\sqrt{3}a}{6\sin\frac{C}{2}}(\cos B+i\sin B)$.

从而 $\overline{z}=\overline{z_F-z_P}=\overline{z_F}-\overline{z_P}$

$$=a\left(\cos\frac{B}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{B}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}a}{6\sin\frac{C}{2}}(\cos B-i\sin B).$$

所以 $\tan(\arg\overline{z})=\frac{\sin B}{4\sin\frac{C}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{B}{2}\right)-\cos B}$

$$=\frac{\sin B}{1+\cos B}=\tan\frac{B}{2}.$$

所以 $\arg\overline{z}=\frac{\angle B}{2}$，即 $\angle BFP=\frac{1}{2}\angle B$.

例 9 设圆 O 的外切四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 的中点分别为 E、F，则 E、O、F 三点共线.

证明 如图 5-11，$AB+CD=AD+BC$. 设 r 为圆 O 的半径，有 $\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}CD\cdot r=\frac{1}{2}AD\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r$，即

$S_{\triangle AOB}+S_{\triangle OCD}=S_{\triangle OAD}+S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$，因 E 是 AC 中点，

则 $S_{\triangle ABE}+S_{\triangle DEC}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$，故有 $S_{\triangle OAB}+S_{\triangle ODC}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle DEC}$，

即 $S_{\triangle ODC}-S_{\triangle DEC}=S_{\triangle ABE}-S_{\triangle OAB}$.

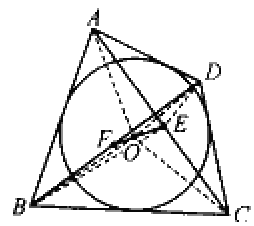


图 5-11

因此有 $S_{\triangle DOE}+S_{\triangle COE}=S_{\triangle BOE}+S_{\triangle AOE}$. 而 $S_{\triangle AOE}=S_{\triangle COE}$，所以 $S_{\triangle DOE}=S_{\triangle BOE}$.

由于 B、D 在 EO 的异侧，EO 的延长线过 BD 的中点 F，故 E、O、F 三点共线.

例 10 在一个平面中，C 为一个圆周，直线 L 是圆周的一条切线，M 为 L 上一点，试求出具有如下性质的所有点 P 的集合：在直线 L 上存在两个点 Q 和 R，使得 M 是线段 QR 的中点，且 C 是 $\triangle PQR$ 的内切圆.

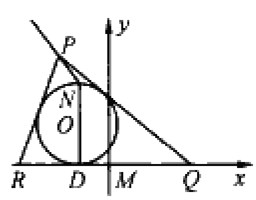


图 5-12

解 以 L 为 x 轴，M 为原点建立坐标系(如图 5-12)，设点 P 的坐标为 (x,y)，圆心 O 的坐标为 (a,r) $(y>2r>0)$，又设过 P 作圆 C 的两条切线与 L 的交点坐标为 $(t_1,0)$、$(t_2,0)$，有

$$t_1+t_2=0.$$

又由 $\angle PRQ=2\angle ORQ$，

$\angle PQR=2\angle OQR$，

有 $\cot\angle PRQ=\cot 2\angle ORQ=\dfrac{\cot^2\angle ORQ-1}{2\cot\angle OPQ}$

及 $\cot\angle PQR=\dfrac{\cot^2\angle OQR-1}{2\cot\angle OQR}$,

得 $\dfrac{x-t_i}{y-0}=\dfrac{\left(\dfrac{a-t_i}{r}\right)^2-1}{2\cdot\dfrac{a-t_i}{r}}(i=1,2)$,

即 $(y-2r)t_i^2-2(ay-rx-ar)t_i+(a^2-r^2)y-2rx=0$.

这表明,二次方程

$(y-2x)t^2-2(ay-rx-ar)t+(a^2-r^2)y-2rx=0$

有两个成相反数的根 t_1、t_2,从而一次项系数为 0,得

$ay-rx-ar=0(y>2r)$.

这是以 $N(a,2r)$ 为端点且平行于 MO 的射线,它就是所求的点 P 的轨迹.

思考交流

思考题 1 两圆 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 相切于点 M,$\odot O_2$ 的半径不大于 $\odot O_1$ 的半径. 点 A 是 $\odot O_2$ 上的一点,且满足 O_1、O_2 和 A 三点不共线. AB、AC 是点 A 到 $\odot O_1$ 的切线,切点分别为 B、C,直线 MB、MC 与 $\odot O_2$ 的另一个交点分别为 E、F,点 D 是线段 EF 和 $\odot O_2$ 的以 A 为切点的切线的交点. 证明:当点 A 在 $\odot O_2$ 上移动且保持 O_1、O_2 和 A 三点不共线时,点 D 沿一条固定的直线移动.

证明 以 M 为原点,O_1O_2 为 x 轴建立直角坐标系,如图 5-13 所示,设 $\odot O_1$ 方程为 $(x+1)^2+y^2=1$,$\odot O_2$ 方程为 $(x-r)^2+y^2=r^2(r>1)$. 设 $A(r+r\cos\theta,r\sin\theta)$,$\theta\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$.

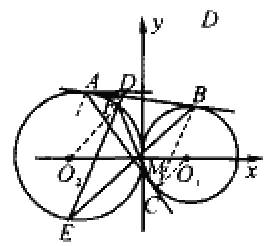


图 5-13

因为 BC 是 $\odot O_1$ 的切点弦,

所以 BC 方程为 $(r+1+r\cos\theta)(x+1)+yr\sin\theta=1$,

即 $(1+r+r\cos\theta)x+(r\sin\theta)y+r(1+\cos\theta)=0$.

又易得 $EF/\!/BC$,设 EF 方程为 $(1+r+r\cos\theta)x+(r\sin\theta)y+t=0$.

又因为 $O_1C/\!/O_2F$,所以 $\dfrac{y_F}{y_C}=\dfrac{x_F}{x_C}=-r$,

所以 $y_C=-\dfrac{1}{r}y_F$,$x_C=-\dfrac{1}{r}x_F$(其中 $F(x_F,y_F)$,$C(x_C,y_C)$).

所以$-\frac{1}{r}(1+r+r\cos\theta)\cdot x_F+(r\sin\theta)\cdot(-\frac{1}{r}y_F)+r(1+\cos\theta)=0$，

所以$(1+r+r\cos\theta)x_F+(r\sin\theta)\cdot y_F-r^2(1+\cos\theta)=0$，

所以直线EF方程为$(1+r+r\cos\theta)x+(r\sin\theta)\cdot y-r^2(1+\cos\theta)=0$.

又因为AD是$\odot O_2$的以点A为切点的切线，

所以直线AD方程为：$r\cos\theta(x-r)+(r\sin\theta)y-r^2=0$.

设$D(x_D,y_D)$，因为点D在EF上，所以$(r_1+r_2)x_D=0$，即$x_D=0$，

所以点D在定直线y轴上移动.

思考题2 已知$\triangle ABC$中，$\angle C$为直角，D为边AC上一点，K为边BD上一点，且$\angle ABC=\angle KAD=\angle AKD$. 证明：$BK=2DC$.

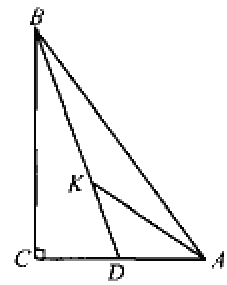


图5-14

证明 如图5-14，设$\angle ABC=\alpha$，则$\angle KAD=\angle AKD=\alpha$，$\angle BDC=2\alpha$.

从而，$BK=AB\cdot\frac{\sin(90^\circ-2\alpha)}{\sin\alpha}$，

$CD=BD\cos2\alpha=\frac{AB\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin2\alpha}\cdot\cos2\alpha$.

即证$\frac{\sin(90^\circ-2\alpha)}{\sin\alpha}=2\times\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin2\alpha}\cdot\cos2\alpha$，

亦即证 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

这是显而易见的，因此$BK=2DC$.

同步检测

1. 如图5-15，设A、B、C、D是一条直线上依次排列的四个不同点，分别以AC和BD为直径的圆相交于X，Y. 直线XY交BC于Z. 若P为直线XY上异于Z的一点，直线CP与以AC为直径的圆相交于C及M，直线BP与以BD为直径的圆相交于B及N，试证：AM、AD、XY三线共点.

2. 如图5-16，过边长为a的正$\triangle ABC$的重心G任作一直线，分别交边AB、AC于M、N.

求证：$\frac{1}{MG^2}-\frac{1}{MG\cdot NG}+\frac{1}{NG^2}$为定值.

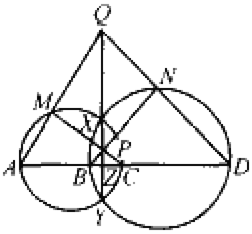


图 5-15

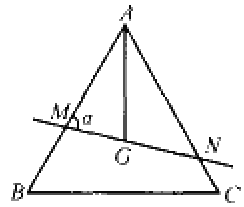


图 5-16

3. $\triangle ABC$ 是等腰三角形，$AB=AC$，假如：①M 是 BC 的中点，O 在直线 AM 上，使得 $OB\perp AB$；②Q 是线段 BC 上不同于 B 和 C 的任意一点；③E 在直线 AB 上，F 在直线 AC 上，使得 E、Q、F 是不同的和共线的，求证：$OQ\perp EF$，当且仅当 $QE=QF$.

4. D 是锐角$\triangle ABC$ 内部一点，$\angle ADB=\angle ACB+90°$. 且 $AC\cdot BD=AD\cdot BC$，求 $\dfrac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}$的值.

5. 已知两圆相交于 X、Y. 证明：存在四个点满足：对于每一个与两个给定的圆分别相切于 A、B 的圆交直线 XY 于 C、D，则 AC、AD、BC、BD 经过这四个点之一.

6. 已知在凸四边形 $ABCD$ 中，直线 CD 与以 AB 为直径的圆相切. 求证：当且仅当 $BC/\!/AD$ 时，直线 AB 与以 CD 为直径的圆也相切.

7. 在平面上给定点 P_0 和$\triangle A_1A_2A_3$，且约定当 $S\geqslant 4$，$A_n=A_{n-3}$ 时，构造点到 P_0，P_1，P_2，…，使得 P_{k+1} 为点 P_k 绕中心 A_{k+1} 顺时针旋转 120°所到达的位置，$k=0,1,2,\cdots$，求证：如果 $P_{1986}=P_0$，则$\triangle A_1A_2A_3$ 为等边三角形.

8. 已知锐角$\triangle ABC$、CD 是过点 C 的高线，M 是边 AB 的中点. 过 M 的直线分别交射线 CA、CB 于点 K、L，且 $CK=CL$. 若$\triangle CKL$ 的外心为 S，求证：$SD=SM$.

参考答案

第一章 平面几何中的重要定理

第1讲 梅涅劳斯定理和塞瓦定理

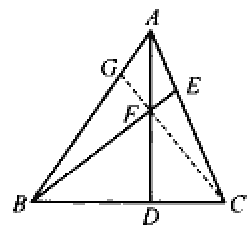
1. 解 如图,连 CF 并延长交 AB 于 G,对 $\triangle ABC$ 及点 F,应用塞瓦定理,有 $\frac{AG}{GB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AG}{GB}\cdot m\cdot n=1$.

所以 $\frac{AG}{GB}=\frac{1}{m\cdot n}$,即 $\frac{AB}{BG}=\frac{mn+1}{mn}$.

对 $\triangle AGC$ 及截线 BFE,应用梅涅劳斯定理,有

$\frac{AB}{BG}\cdot\frac{GF}{FC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{mn+1}{mn}\cdot\frac{GF}{FC}\cdot n=1$,所以 $\frac{GF}{FC}=\frac{m}{mn+1}$.

故 $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{GF}{GC}=\frac{GF}{FC+GF}=\frac{m}{mn+m+1}$ 为所求.

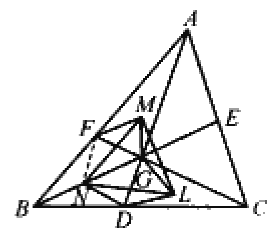


第1题图

2. 证明 如图,连 NF,对 $\triangle ABC$ 及点 G 应用塞瓦定理,有 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$. 而 $AE=CE$,则 $\frac{AF}{FB}=\frac{DC}{BD}$.

由 $DN\parallel CG$,有 $\frac{CD}{BD}=\frac{NG}{BN}$.

于是,有 $\frac{AF}{FB}=\frac{NG}{BN}$,从而 $FN\parallel AD$,即知四边形 $DNFG$ 为平行四边形,有 $\angle GDN=\angle GFN$.



第2题图

又 $\angle GDL=\angle GFM=60^\circ$,则 $\angle LDN=\angle NFM$.

而 $DN=GF=FM$,$DL=DG=NF$,知 $\triangle LDN\cong\triangle NFM$,有 $LN=MN$,$\angle DNL=\angle NMF$. 于是

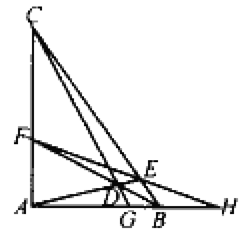
$\angle MNL=\angle DNF-(\angle DNL+\angle MNF)=\angle DNF-(\angle NMF+\angle MNF)$

$=(180^\circ-\angle NFG)-(180^\circ-\angle NFM)=\angle NFM-\angle NFG$

$=\angle MFG=60^\circ$.

故$\triangle LMN$为正三角形.

3. 证明　如图,设G分线段AB为定比λ_1,H分线段AB为定比λ_2.下证λ_2由λ_1确定,即当A、B给定后,点H的位置由点G惟一确定.



第 3 题图

在$\triangle ABC$中,由AE、BF、CG交于一点D,应用塞瓦定理,有

$\frac{AG}{GB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$,即$\lambda_1\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$.

对$\triangle ABC$及截线EFH,应用梅涅劳斯定理,得

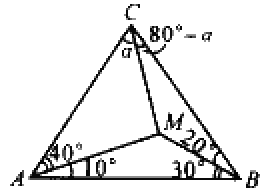
$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$,即$\lambda_2\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=-1$.

上述两式相加,得$(\lambda_1+\lambda_2)\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=0$.

从而$\lambda_1+\lambda_2=0$,即$\lambda_2=-\lambda_1$,故λ_2由λ_1惟一确定.

因此,点H与点D在直线CG上的位置无关.

4. 解　如图,设$\angle ACM=\alpha$,则$\angle MCB=80^\circ-\alpha$.由角元形式的塞瓦定理,有$\frac{\sin\alpha}{\sin(80^\circ-\alpha)}\cdot\frac{\sin10^\circ}{\sin40^\circ}\cdot\frac{\sin20^\circ}{\sin30^\circ}=1$.



第 4 题图

从而　$\sin\alpha\cdot\sin10^\circ=\sin(80^\circ-\alpha)\cdot\cos20^\circ$,　①

所以$2\sin\alpha\cdot\cos80^\circ=2\sin(80^\circ-\alpha)\cdot\cos20^\circ$,

所以$\sin(\alpha+80^\circ)+\sin(\alpha-80^\circ)=\sin(100^\circ-\alpha)+\sin(60^\circ-\alpha)$,

所以$\sin(\alpha-80^\circ)-\sin(60^\circ-\alpha)=\sin(100^\circ-\alpha)-\sin(\alpha+80^\circ)$

$=2\cos90^\circ\cdot\sin(10^\circ-\alpha)=0$.

于是　$\sin(\alpha-80^\circ)=\sin(60^\circ-\alpha)$.

注意到　$0<\alpha<80^\circ$,知$-80^\circ<\alpha<-80^\circ,60^\circ-\alpha<60^\circ$.

所以$\alpha-80^\circ=60^\circ-\alpha$,故$\alpha=70^\circ$.

所以　$\angle AMC=180^\circ-\angle MAC-\angle ACM=180^\circ-40^\circ-70^\circ=70^\circ$为所求.

注　此题结果也可直接由①式得出

$\begin{cases}\sin\alpha=\sin70^\circ\\ \sin10^\circ=\sin(80^\circ-\alpha)\end{cases}$且$0<\alpha,80^\circ-\alpha<80^\circ$,求得$\alpha=70^\circ$.

5. 证明　如图,记$\angle BAC=\angle CAD=\theta$,$\angle GAC=\alpha$,$\angle EAC=\beta$,直线$GFD$与$\triangle BCE$相截,由梅涅劳斯定理,有

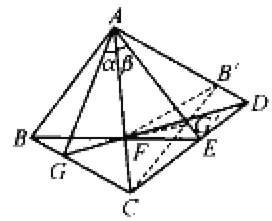
$$1=\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FB}=\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle AGC}}\cdot\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle AED}}\cdot\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABF}}=\frac{AB\cdot\sin(\theta-\alpha)}{AC\cdot\sin\alpha}\cdot\frac{AC\cdot\sin\theta}{AE\cdot\sin(\theta-\beta)}\cdot$$

$\frac{AE \cdot \sin\beta}{AB \cdot \sin\theta}=\frac{\sin(\theta-\alpha) \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin(\theta-\beta)}$,

所以 $\sin(\theta-\alpha) \cdot \sin\beta=\sin(\theta-\beta) \cdot \sin\alpha$.

即 $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta-\cos\theta \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta=\sin\theta \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha-\cos\beta \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha$,

亦即 $\sin\theta \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta=\sin\theta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \Leftrightarrow \sin(\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=k\pi$,且 k 只可能为 0,故 $\angle GAC=\angle EAC$.



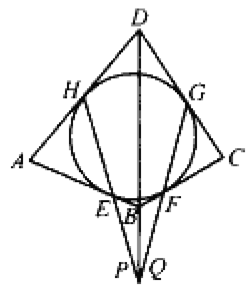
第 5 题图

6. 证明 如图,设 HE 交 DB 的延长线于 P,对$\triangle BAD$ 及截线 HEP,运用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{BP}{PD} \cdot \frac{DH}{HA} \cdot \frac{AE}{EB}=1. \quad ①$$

设 GF 交 DB 的延长线于 Q,对$\triangle BCD$ 及截线 QFG 运用梅涅劳斯定理,得

$$\frac{DQ}{QB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GD}=1. \quad ②$$



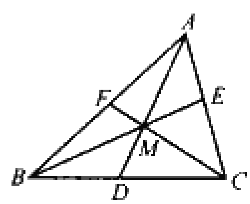
第 6 题图

又由切线长定理,知 $HA=AE$、$EB=BF$,$FC=CG$,$GD=DH$,再由①、②两式相乘,化简得 $\frac{DP}{PB}=\frac{DQ}{DB}$.

运用合比定理有 $\frac{DP+PB}{PB}=\frac{DQ+QB}{QB}$,即 $\frac{DB}{PB}=\frac{DB}{QB}$.

故 $PB=QB$,即 P、Q 重合,亦即 HB、DB、GF 三线共点.

7. 证明 如图,记 $\frac{BD}{DC}=m$,$\frac{CE}{EA}=n$,$\frac{AF}{FB}=l$. 对$\triangle ABC$ 及点 M,应用塞瓦定理,有 $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB}=mnl=1$.



第 7 题图

对$\triangle ADC$ 及截线 EMB,应用梅涅劳斯定理,有 $\frac{AM}{MD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CE}{EA}=\frac{AM}{MD} \cdot \frac{m}{1+m} \cdot n=1$,即

$$\frac{AM}{MD}=\frac{1+m}{mn}=(1+m)l.$$

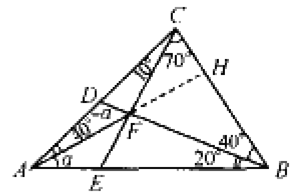
由合比定理得 $\frac{AD}{MD}=1+(1+m)l$,即 $\frac{MD}{AD}=\frac{1}{1+l+ml}$.

同理,$\frac{ME}{BE}=\frac{1}{1+m+mn}=\frac{l}{l+ml+1}$,

$$\frac{MF}{CF}=\frac{1}{1+n+nl}=\frac{ml}{ml+1+l}.$$

三式相加，得$\frac{MD}{AD}+\frac{ME}{BE}+\frac{MF}{CF}=1$.

8. 证明　如图，设$\angle BAF=\alpha$，则$\angle FAC=40^\circ-\alpha$，对$\triangle ABC$及点$F$，应用角元形式的塞瓦定理，有



第 8 题图

$$\frac{\sin10^\circ}{\sin70^\circ}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(40^\circ-\alpha)}\cdot\frac{\sin40^\circ}{\sin20^\circ}=1.$$

从而　$\frac{\sin10^\circ}{\cos20^\circ}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(40^\circ-\alpha)}\cdot\frac{2\sin20^\circ\cdot\cos20^\circ}{\sin20^\circ}=1$，即有$\sin(40^\circ-\alpha)=2\sin\alpha\cdot\sin10^\circ=2\sin\alpha\cdot\cos80^\circ=\sin(\alpha+80^\circ)+\sin(\alpha-80^\circ)$.

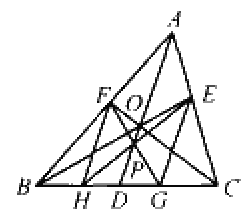
所以$\sin(\alpha-80^\circ)=\sin(40^\circ-\alpha)-\sin(\alpha+80^\circ)=2\cos60^\circ\cdot\sin(-20^\circ-\alpha)=\sin(-20^\circ-\alpha)$.

注意到$0<\alpha<40^\circ$，知$-80^\circ<-20^\circ-\alpha,\alpha-80^\circ<20^\circ$，有

$\alpha-80^\circ=-20^\circ-\alpha$，故$\alpha=30^\circ$.

延长AF交BC于H，则$\angle AHB=180^\circ-\angle FAB-\angle ABH=180^\circ-30^\circ-60^\circ=90^\circ$. 故$AF\perp BC$.

9. 证明　如图，由塞瓦定理，得



第 9 题图

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

由$EG/\!/AD/\!/FH$，可得

$$BD=\frac{BH\cdot AD}{FH},CE=\frac{EG\cdot CA}{AD},\frac{AF}{FB}=\frac{HD}{BH}.$$

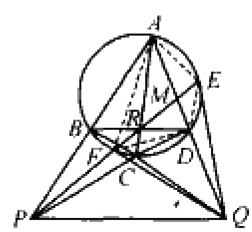
把上述三式代入塞瓦定理得

$$\frac{HD}{DC}\cdot\frac{CA}{AE}\cdot\frac{EG}{FH}=1.$$

又$\frac{EG}{FH}=\frac{EP}{PH}$，从而$\frac{HD}{DC}\cdot\frac{CA}{AE}\cdot\frac{EP}{PH}=1$.

由梅氏定理的逆定理，知D、A、P三点共线，即点P在直线AD上.

10. 证明　如图，设直线PR交AQ于点M，因直线BQ与$\triangle PAD$三边都相交，由梅氏定理，得



第 10 题图

$$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PC}{CD}\cdot\frac{DQ}{QA}=1.\qquad ①$$

又在$\triangle PAD$中，AC、BD、PM相交于点R，

由塞瓦定理，得$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PC}{CD}\cdot\frac{DM}{MA}=1$.　②

由①、②,得$\frac{DQ}{QA}=\frac{DM}{MA}$. ③

另一方面,设直线 EF 交 AQ 于点 M',连结 ED、EA、FD、FA,因$\frac{M'D}{M'A}=\frac{S_{\triangle EDM'}}{S_{\triangle EAM'}}=$

$$\frac{\frac{1}{2}ED\cdot EM'\cdot\sin\angle DEF}{\frac{1}{2}EA\cdot EM'\cdot\sin\angle FEA}=\frac{ED\cdot\sin\angle DEF}{EA\cdot\sin\angle FEA},$$

而$\angle DEF=\angle DAF$,$\angle FEA=\angle FDA$,

且$\frac{FD}{\sin\angle DAF}=\frac{FA}{\sin\angle FDA}$,

从而,得$\frac{M'D}{M'A}=\frac{ED\cdot FD}{EA\cdot FA}$.

由$\triangle QDE\backsim\triangle QEA$和$\triangle QDF\backsim\triangle QFA$,得

$\frac{QD}{QE}=\frac{QE}{QA}=\frac{DE}{EA}$,$\frac{QD}{QF}=\frac{QF}{QA}=\frac{DF}{DA}$.

又 $QE=QF$,从而$\frac{M'D}{M'A}=\frac{QD}{QA_1}$. ④

由③、④得$\frac{DM}{MA}=\frac{M'D}{M'A}$,所以 M 和 M' 重合.

同理可证,EF 和 BQ 的交点与 PR 和 BQ 的交点重合.

于是,P、F、R、E 四点共线.

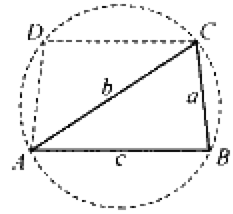
第 2 讲 平面几何中三个相互等价的定理

1. 解 如图,过点 C 作 $CD\parallel AB$ 交$\triangle ABC$ 的外接圆于 D,连 AD,则四边形 $ABCD$ 为等腰梯形.由托勒密定理,有 $b^2=a^2+c\cdot CD$.

由已知有 $b^2=a^2+c\cdot a$,则 $CD=a$,从而

$AD=DC=CB$,即$\widehat{ADC}=2\widehat{BC}$,亦即$\angle B=2\angle BAC$.

又因为在$\triangle ABC$中,角 A、B、C 的大小成等比数列,则公比 $q=\frac{\angle B}{\angle A}=2$,从而$\angle A+\angle B+\angle C=\angle A+2\angle A+4\angle A=7\angle A=\pi$,故$\angle A=\frac{\pi}{7}$,$\angle B=\frac{2\pi}{7}$为所求.

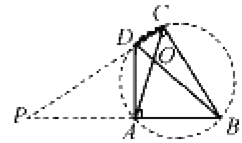


第 1 题图

2. 解 如图,因$\angle BAD=\angle BCD=90°$,则 A、B、C、D 四点共圆.延长 BA、CD 交于 P,则$\angle ADP=\angle ABC=60°$.

设 $AD=x$,有 $AP=\sqrt{3}x$,$DP=2x$,由割线定理,有$(2+\sqrt{3}x)\cdot\sqrt{3}x=2x(1+2x)$.求

得 $AD=x=2\sqrt{3}-2$，$BC=\dfrac{BP}{2}=4-\sqrt{3}$.



第 2 题图

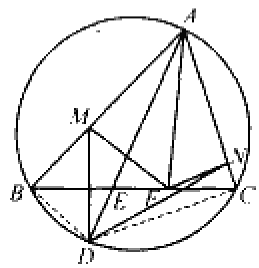
对四边形 $ABCD$ 应用托勒密定理，有

$BD\cdot AC=(4-\sqrt{3})(2\sqrt{3}-2)+2\cdot 1=10\sqrt{3}-12$.

又 $S_{ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=(2\sqrt{3}-2)+\dfrac{1}{2}(4-\sqrt{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

从而，$\dfrac{1}{2}(10\sqrt{3}-12)\cdot\sin\angle AOB=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. 故 $\sin\angle AOB=\dfrac{15+6\sqrt{3}}{26}$.

3. 证明　如图，设 $\angle BAE=\angle CAF=\alpha$，$\angle EAF=\beta$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AF\cdot\sin(\alpha+\beta)+\dfrac{1}{2}AC\cdot AF\cdot\sin\alpha=\dfrac{AF}{4R}(AB\cdot CD-AC\cdot BD)$，其中 R 为外接圆半径. 又 $S_{四边形AMDN}=\dfrac{1}{2}AM\cdot AD\cdot\sin\alpha+\dfrac{1}{2}AD\cdot AN\cdot\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}AD[AF\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha+AF\cdot\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)]=\dfrac{1}{2}AD\cdot AF\cdot\sin(2\alpha+\beta)=\dfrac{AF}{4R}AD\cdot BC$.



第 3 题图

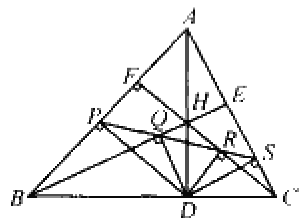
由托勒密定理，有 $AB\cdot CD-AC\cdot BD=AD\cdot BC$.

故　$S_{四边形AMDN}=S_{\triangle ABC}$.

4. 证明　如图，由于 $\triangle BFH$ 的外接圆为 $\odot BDHF$，而 D 为该圆上一点，且 D 在 $\triangle BFH$ 三边所在直线上的射影分别为 P、Q、R，于是，由西姆松定理知 P、Q、R 三点共线.

同理，可证 Q、R、S 是 $\triangle HEC$ 的西姆线上三点.

由于直线 PQR 与直线 QRS 有两个公共点 Q、R，所以这两直线重合，故 Q、P 在直线 PS 上.

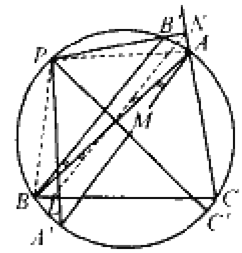


第 4 题图

5. 证明　如图，设 $PA'\perp BC$ 于 L，$PB'\perp$ 直线 AC 于 N，$PC'\perp AB$ 于 M，则由西姆松定理知 L、M、N 三点共线. 注意到 L、B、P、M 及 A'、B、P、A 分别四点共圆，连 BP，则 $\angle AMN=\angle BML=\angle BPL=\angle BPA'=\angle BAA'$，于是 $AA'/\!/LN$.

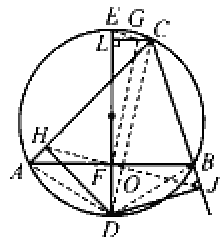
同样，注意到 A、B、P、B' 及 A、M、P、N 分别四点共圆，连 PA，则 $\angle ABB'=\angle APB'=\angle APN=\angle AMN$，于是 $BB'/\!/LN$.

由 A、P、C'、C 四点共圆，知 $\angle ACC'+\angle APC'=180°$. 注意到 $\angle APC'=\angle APM=\angle ANM=\angle CNM$，则 $\angle ACC'+\angle CNM=180°$，于是 $CC'/\!/LM$，故 $AA'/\!/BB'/\!/CC'$.



第 5 题图

6. 证明　如图，从 D 向 AC、CB 的延长线作垂线 DH、DJ，垂足分别为 H、J，则由西姆松定理知 H、F、J 三点共线.



第 6 题图

连接 DC 交 HJ 于 O，过 F 作 $FG/\!/DC$，交 CE 于 G，则由 D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点知，DC 平分 $\angle ACB$.

连接 AD、BD，易证

$\mathrm{Rt}\triangle CDH\cong\mathrm{Rt}\triangle CDJ$，$\mathrm{Rt}\triangle ADH\cong\mathrm{Rt}\triangle BDJ$.

即有　$CH=CJ$，$AH=BJ$，

所以 $CH=\frac{1}{2}(AC-BC)$　　①

又　$DC\perp HJ$，而 $DC\perp CE$，

所以 $EC/\!/HJ$　　②

因此　$CH^2=CO\cdot CD=GF\cdot CD$.

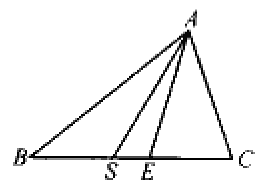
但　$\mathrm{Rt}\triangle DCL\cong\mathrm{Rt}\triangle FEG$，

所以 $DC:DL=FE:FG$，

即　$GF\cdot DC=DL\cdot EF$，　　③

故由①、②、③，得　$(AC+BC)^2=4DL\cdot EF$.

7. 证明　如图，对 $\triangle ABC$ 及边 BC 上的点 S，应用斯特瓦尔特定理，有



第 7 题图

$$AS^2=AB^2\cdot\frac{SC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BS}{BC}-BS\cdot SC.$$

由 AE 平分 $\angle A$，对 $\triangle ABC$ 及边 BC 上的点 E，应用斯特瓦尔特定理的推论 3，有 $AE^2=AB\cdot AC-BE\cdot EC$，从而

$$AS^2-AE^2=AB^2\cdot\frac{SC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BS}{BC}-AB\cdot AC+BE\cdot EC-BS\cdot SC.\quad①$$

因 $BS=EC$，有 $BE=SC$，即 $BE\cdot EC=BS\cdot SC$.

由角平分线的性质，有 $\frac{BE}{BC}=\frac{AB}{AB+AC}$，$\frac{EC}{BC}=\frac{AC}{AB+AC}$，

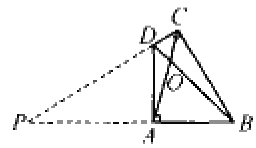
即　$\frac{SC}{BC}=\frac{BE}{BC}=\frac{AB}{AB+AC}$，$\frac{BS}{BC}=\frac{EC}{BC}=\frac{AC}{AB+AC}$.

从而，由①式，有 $AS^2-AE^2=(AB-AC)^2$.

8. 解　如图，延长 BA、CD 相交于 P，设 $BC=x$，则 $PB=2x$，$PC=\sqrt{3}x$，对 $\triangle PBC$ 及 PB 边上的点 A，应用斯特瓦尔特定理，有

$$CA^2=PC^2\cdot\frac{AB}{PB}+BC^2\cdot\frac{PA}{PB}-AB\cdot PA$$

$=(\sqrt{3}x)^2\cdot\dfrac{2}{2x}+x^2\cdot\dfrac{2x-2}{2x}-2(2x-2)=x^2-2x+4.$



第 8 题图

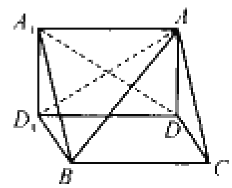
由 Rt△ADC∽Rt△CBP，有 $PD\cdot PC=PA\cdot PB$，即 $(\sqrt{3}x-1)\cdot\sqrt{3}x=(2x-2)\cdot 2x$，求得 $BC=x=4-\sqrt{3}$.

于是，$CA^2=15-6\sqrt{3}$. 又在 Rt△BCD 中，$BD^2=x^2+1=20-8\sqrt{3}$，从而 $BD\cdot AC=\sqrt{4(5-2\sqrt{3})}\cdot\sqrt{3(5-2\sqrt{3})}=10\sqrt{3}-12$.

而 $S_{ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=(2\sqrt{3}-2)+\dfrac{1}{2}(4-\sqrt{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

故 $\dfrac{1}{2}(10\sqrt{3}-12)\cdot\sin\angle AOB=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，即 $\sin\angle AOB=\dfrac{15+6\sqrt{3}}{26}$ 为所求.

9. 证明　如图，连接 A_1D、AD_1



第 9 题图

因为 $AA_1\underline{\mathbin{/\!/}}DD_1\underline{\mathbin{/\!/}}CB$，

所以 $D_1A_1=DA$，$D_1B=DC$，$A_1B=AC$.

在四边形 A_1D_1BA 中，由广义的托勒密定理，有

$D_1A_1\cdot BA+BD_1\cdot AA_1\geqslant A_1B\cdot D_1A$，

即　$DA\cdot BA+CD\cdot BC\geqslant AC\cdot D_1A$. ①

在四边形 AD_1BD 中，由广义的托勒密定理，有

$BD_1\cdot DA+BD\cdot D_1A\geqslant D_1D\cdot AB$，

即　$DC\cdot DA+BD\cdot D_1A\geqslant AB\cdot BC$， ②

由①×DB+②×AC，有

$DA\cdot DB\cdot AB+DB\cdot DC\cdot BC+DA\cdot DC\cdot AC+AC\cdot BD\cdot D_1A\geqslant AC\cdot BD\cdot D_1A+AB\cdot BC\cdot AC$，

即　$DA\cdot DB\cdot AB+DB\cdot DC\cdot BC+DA\cdot DC\cdot AC\geqslant AB\cdot BC\cdot AC$. ③

由已知条件知，不等式③取到等号，从而使不等式①、②也必须同时取到等号，

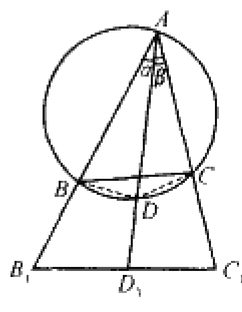
即　$D_1A_1\cdot BA+BD_1\cdot AA_1=A_1B\cdot D_1A$，

且　$BD_1+DA+BD\cdot D_1A-D_1D\cdot AB$，

由托勒密定理的逆定理，知：

四边形 A_1D_1BA 是圆内接四边形，且四边形 AD_1BD 是圆内接四边形.

故　A、D、B、D_1、A_1 五点共圆.



第 10 题图

10. 证明　如图，连 BD、CD. 设 $\angle BAD=\alpha$，$\angle CAD=\beta$，△ABC 外接圆的半径为 R.

因 D_1 为 B_1C_1 的中点，知 $S_{\triangle AB_1D_1}=S_{\triangle AC_1D_1}=\frac{1}{2}S_{\triangle AB_1C_1}$。在$\triangle BCD$ 中，由正弦定理，有 $BD=2R\cdot\sin\alpha$，$CD=2R\cdot\sin\beta$，$BC=2R\cdot\sin(\alpha+\beta)$。

在圆内接四边形 $ABCD$ 中，由托勒密定理得 $AB\cdot CD+AC\cdot BD=AD\cdot BC$，即 $AB\cdot 2R\cdot\sin\beta+AC\cdot 2R\cdot\sin\alpha=AD\cdot 2R\cdot\sin(\alpha+\beta)$，

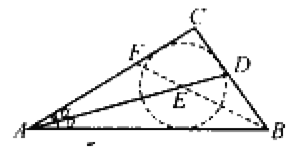
两边同乘以$\frac{1}{4R}\cdot AB_1\cdot AC_1\cdot AD_1$，得

$AB\cdot AB_1\cdot S_{\triangle AC_1D_1}+AC\cdot AC_1\cdot S_{\triangle AB_1D_1}=AD\cdot AD_1\cdot S_{\triangle AB_1C_1}$，

即　$AB\cdot AB_1+AC\cdot AC_1=2AD\cdot AD_1$。

第 3 讲　平面几何中几个易被忽视的定理

1. 证明　如图，连 BE 并延长交 AC 于 F，令$\angle BAE=\alpha$，由于 E 为内心，则$\angle EAF=\alpha$。以 A 为视点，分别对 B、E、F 及 B、D、C 应用张角定理的推论，得



第 1 题图

$\frac{2\cos\alpha}{AE}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AF}$，$\frac{2\cos\alpha}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$。

上述两式相除，得

$\frac{AD}{AE}=\frac{AC(AB+AF)}{AF(AC+AB)}$，

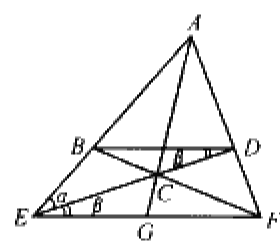
而$\frac{AD}{AE}=\frac{AE+ED}{AE}=1+\frac{ED}{AE}$，

从而　$\frac{ED}{AE}=\frac{AB(AC-AF)}{AF(AC+AB)}=\frac{AB}{AF}\cdot\frac{CF}{AB+AC}$。　①

又 BF 平分$\angle B$，则$\frac{AB}{BC}=\frac{AF}{CF}$，即$\frac{AB}{AF}=\frac{BC}{CF}$。

于是，由上式代入①式，得$\frac{ED}{AE}=\frac{BC}{AB+AC}$，故$\frac{AE}{ED}=\frac{b+c}{a}$。

2. 证明　如图，以 E 为视点，令$\angle BEC=\alpha$，$\angle CEG=\beta$，分别对 B、C、F；A、D、F 及 A、C、G 应用张角定理，得



第 2 题图

$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{EC}=\frac{\sin\alpha}{EF}+\frac{\sin\beta}{EB}$，　①

$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{ED}=\frac{\sin\alpha}{EF}+\frac{\sin\beta}{EA}$，　②

$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{EC}=\frac{\sin\alpha}{EG}+\frac{\sin\beta}{EA}$。　③

又由 $BD/\!/EF$，有$\angle BDE=\beta$，在$\triangle BED$ 中应用正弦定理，有$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{ED}=\frac{\sin\beta}{EB}$。　④

由①+②-③-④，得$\frac{2\sin\alpha}{EF}=\frac{\sin\alpha}{EG}$，

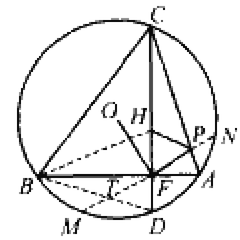
所以 $EF=2EG$，即 $EG=GF$.

3. 证明　如图，延长 CF 交$\odot O$于 D 点，连 BD、BH.

由于$\angle BHF=\angle CAF=\angle D$，且 $BF\perp HD$，则 F 为 HD 的中点.

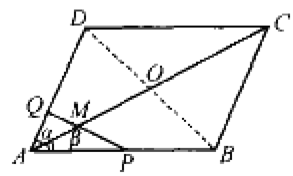
设 FP 所在直线交$\odot O$于 M、N 两点，交 BD 于 T 点.

由 $OF\perp MN$ 知 F 为 MN 的中点. 由蝴蝶定理即得 F 为 PT 的中点. 又因 F 为 HD 的中点，故 $HP\parallel TD$. 所以，$\angle FHP=\angle D=\angle BAC$.



第 3 题图

4. 证明　如图，连 BD 交 AC 于 O，则 $AO=\frac{1}{2}AC$. 令$\angle DAM=\alpha$、$\angle BAM=\beta$，$AB=3a$，$AD=4b$. 以 A 为视点，分别对$\triangle APQ$ 和$\triangle ABD$ 应用张角定理，有



第 4 题图

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AM}=\frac{\sin\alpha}{a}+\frac{\sin\beta}{b}=\frac{b\cdot\sin\alpha+a\cdot\sin\beta}{ab},$$

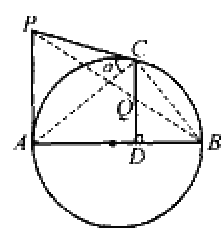
$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AO}=\frac{\sin\alpha}{3a}+\frac{\sin\beta}{4b}=\frac{4b\cdot\sin\alpha+3a\cdot\sin\beta}{12ab}.$$

因 $S_{\triangle ADO}=S_{\triangle ABO}$，则 $4b\cdot\sin\alpha=3a\cdot\sin\beta$.

于是，$\frac{AM}{AO}=\frac{4b\cdot\sin\alpha+3a\cdot\sin\beta}{12b\cdot\sin\alpha+12a\cdot\sin\beta}=\frac{6a\cdot\sin\beta}{9a\cdot\sin\beta+12a\cdot\sin\beta}=\frac{2}{7}$.

故 $AC=7AM$.

5. 证明　如图，以 C 为视点，考察线段 PQ、QB 所张的角的情形. 连 AC、BC，则$\angle ACB=90°$. 令$\angle PCA=\alpha$，则$\angle CBA=\angle ACD=\alpha$，令 $PC=a$，易知 $AC=2a\cdot\cos\alpha$，$BC=AC\cdot\cot\alpha=2a\cdot\cos\alpha\cdot\cot\alpha$，$CD=BC\cdot\sin\alpha=2a\cdot\cos^2\alpha$，$CQ=a\cdot\cos^2\alpha$.



第 5 题图

所以　$\frac{\sin\angle PCB}{CQ}=\frac{\sin(90°+\alpha)}{CQ}=\frac{\cos\alpha}{a\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1}{a\cdot\cos\alpha}$，

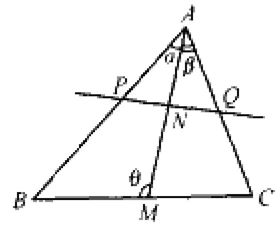
$$\frac{\sin\angle PCQ}{CB}+\frac{\sin\angle QCB}{CP}=\frac{\sin2\alpha}{2a\cos\alpha\cdot\cot\alpha}+\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\sin^2\alpha}{a\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{a\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{a\cdot\cos\alpha}.$$

故　$\frac{\sin\angle PCB}{CQ}=\frac{\sin\angle PCQ}{CB}+\frac{\sin\angle QCB}{CP}$.

由张角定理，知 P、Q、B 三点共线.

6. 证明　如图，令$\angle BAM=\alpha$，$\angle MAC=\beta$，$\angle AMB=\theta$. 以 A 为视点，分别对 P、N、Q 及 B、M、C 应用张角定理，有

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AN}=\frac{\sin\beta}{AP}+\frac{\sin\alpha}{AQ},\quad ①$$



第 6 题图

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AM}=\frac{\sin\beta}{AB}+\frac{\sin\alpha}{AC}.\quad ②$$

又在$\triangle ABM$和$\triangle AMC$中，由正弦定理，有

$$\frac{\sin\theta}{AB}=\frac{\sin\alpha}{MB},\frac{\sin\theta}{AC}=\frac{\sin\beta}{MC}.$$

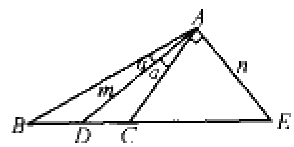
注意到$MB=MC$，上述两式相除得$\frac{\sin\alpha}{AC}=\frac{\sin\beta}{AB}$.

于是②式变为 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AM}=\frac{2\sin\beta}{AB}=\frac{2\sin\alpha}{AC}$.

由①式除以上式，得 $\frac{AM}{AN}=\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}\right)$.

故 $\frac{AB}{AP},\frac{AM}{AN},\frac{AC}{AQ}$成等差数列.

7. 证明 如图，设$AD=m$，$AE=n$，$\angle BAD=\angle DAC=\alpha$，以$A$为视点，分别对$\triangle ADE$和$\triangle ABE$应用张角定理，得$\frac{\sin 90^\circ}{AC}=\frac{\sin\alpha}{n}+\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{m}$，$\frac{\sin(90^\circ+\alpha)}{m}=\frac{\sin 90^\circ}{AB}+\frac{\sin\alpha}{n}$，



第 7 题图

于是 $AC=\frac{mn}{n\cos\alpha+m\sin\alpha}$，$AB=\frac{mn}{n\cos\alpha-m\sin\alpha}$.

在$\triangle ABE$中，由余弦定理，并注意

$\cos\alpha>0$，$n\cos\alpha-m\sin\alpha>0(AB>0)$，

有 $BE=\sqrt{AB^2+AE^2-2AB\cdot AE\cdot\cos(90^\circ+\alpha)}$

$$=\sqrt{\frac{n^2\cdot\cos^2\alpha\cdot(m^2+n^2)}{(n\cos\alpha-m\cos\alpha)^2}}=\frac{n\cos\alpha\cdot\sqrt{m^2+n^2}}{n\cos\alpha-m\sin\alpha}.$$

同理，在$\triangle ACE$中，求得$CE=\frac{n\cos\alpha\cdot\sqrt{m^2+n^2}}{n\cos\alpha+m\sin\alpha}$.

而在$Rt\triangle ADE$中，$DE=\sqrt{m^2+n^2}$.

故 $\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{2n\cos\alpha}{n\cdot\cos\alpha\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{2}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{2}{DE}$.

第二章 三角形中的特殊点

第 1 讲 三角形中的心

1. 证明 由题意得$\angle DAE=90^\circ$，所以O在DE上且为DE中点，又易得$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$，

所以 $OD\perp BC$. 要证 $AP/\!/BC$，只须证明 $AP\perp DE$.

设 $\triangle ADG$、$\triangle AEF$ 的外心分别为 O_1、O_2，取 AD、AE 的中点 D'、E'，则有 $O_1E\perp AG$，$O_2E'\perp AG$，$O_1D'\perp AF$，$O_2D\perp AF$，又 $\angle FAG=\angle DAE=90^\circ$，得 $O_2D/\!/O_1D'/\!/EA$，$O_1E/\!/O_2E'/\!/DA$.

设 O_1D' 与 O_2E' 交于点 H，则 $O_2H=HE'$，$O_1H=HD'$，所以四边形 $O_1O_2D'E'$ 是平行四边形. 所以 $D'E'/\!/O_1O_2$. 所以 $DE/\!/O_1O_2$.

又 AP 为 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的公共弦，所以 $O_1O_2\perp AP$，所以 $DE\perp AP$，所以 $AP/\!/BC$.

2. 证明　设小圆圆心为 O'，半径为 r，大圆圆心为 O，半径为 R，且 $\odot O'$ 与 AB、BC 分别切于 D、E 两点. 连结 DE、BO' 交于点 I'.

下面证明 $I'=I$，延长 BO' 交 $\odot O$ 于点 F，易知 BF 平分 $\angle ABC$ 及 $\widehat{AC}$，则 O' 关于 $\odot O$ 的幂为 $r(2R-r)=2Rr-r^2=BO'\cdot O'F=O'F\cdot\dfrac{r}{\sin\frac{B}{2}}$. 所以 $O'F=(2R-r)\cdot\sin\dfrac{B}{2}$.

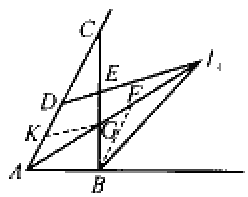
所以 $FI'=FO'+O'I'=(2R-r)\sin\dfrac{B}{2}+r\sin\dfrac{B}{2}=2R\sin\dfrac{B}{2}=AF$.

所以 $I'=I$. 连结 BT、$O'T$，有 $O'I'\cdot O'B=O'E^2=r^2=O'T^2$.

所以 $\triangle O'I'T\backsim\triangle O'TB$，所以 $\angle O'TI'=\angle O'BT$. 过点 T 作两圆的公切线 TG.

所以 $\angle CTI+\angle O'BC=\angle CTI+\angle O'BT+\angle TBC=\angle CTI+\angle O'TI+\angle TBC=\angle CTO'+\angle CTG=\angle O'TG=90^\circ$. 所以 $\angle CTI=90^\circ-\angle O'BC=90^\circ-\dfrac{\angle B}{2}$. 同理，$\angle ATI=90^\circ-\dfrac{\angle B}{2}$. 所以 $\angle CTI=\angle ATI$.

3. 证明　如图，设 $\angle ACB=\alpha$，$\angle BAC=2\alpha$，则 $\angle ABC$ 的外角等于 3α.



第 3 题图

所以 $\angle I_ABC=\dfrac{3}{2}\alpha$，记 G 为 AI_A 与 BC 的交点，则 $\angle BAG=\angle GAC=\alpha$，作 $BF/\!/AC$ 交 AI_A 于点 F.

则 $\angle GFB=\alpha$，又 $\angle AGB=2\alpha$，所以 $\angle FBG=\alpha=\angle GFB$.

所以 $\angle I_ABF=\dfrac{\alpha}{2}=\angle FI_AB$，所以 $FB=FI_A$，$GF=GB$.

所以 $AI_A=AF-FB$，$GI_A=GF+FB$，所以 $\dfrac{AI_A}{GI_A}=\dfrac{AF+FB}{FB+GF}$.

因为 $\triangle ABF\backsim\triangle BGF$，所以 $\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{BF}{GF}=\dfrac{AF+FB}{BF+GF}$，且 $\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{AB}{BG}$，所以 $\dfrac{AI_A}{GI_A}=\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{AB}{BG}=\dfrac{AC}{GC}$.

作 $GK /\!/ DI_A$ 交 AC 于点 K. 则 $\dfrac{GE}{CE}=\dfrac{KD}{CD}=\dfrac{KD}{AD}=\dfrac{GI_A}{AI_A}=\dfrac{GC}{AC}=\dfrac{AG}{AC}$,

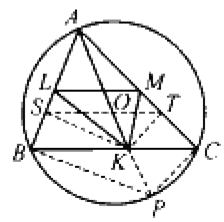
所以 AE 是 $\angle GAC$ 的角平分线.

所以 $\angle BAE=\dfrac{3}{2}\alpha$, 又 $\angle CBA=\pi-3\alpha$, 所以 $\angle AEB=\dfrac{3}{2}\alpha$.

所以 $\angle BAE=\angle AEB$, 所以 $AB=BE$.

4. 证明　如图, 作 $KS\perp AB$ 于点 S, 作 $KT\perp AC$ 于点 T, 延长 AO 交⊙O 于点 P, 则 $\triangle ASK$、$\triangle ABP$、$\triangle ATK$、$\triangle ACP$ 均为直角三角形, 所以 $\triangle ASK\backsim\triangle ABP$, $\triangle ATK\backsim\triangle ACP$. 所以 $\dfrac{AS}{AB}=\dfrac{AK}{AP}=\dfrac{AT}{AC}$, 所以 $ST /\!/ BC$.

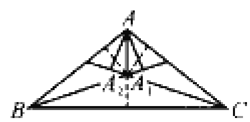
又因为 $LS=SB$, $MT=TC$, 所以 $LM /\!/ BC$.



第 4 题图

5. 证明　如图, 易知 $\angle B$、$\angle C$ 的平分线的交点为内心 I, 过点 I 分别作 AB、AC、BC 的垂线交三边于 F、E、D.

因为 $\angle AA_2C=\angle AA_1B=90^\circ$, 所以 A、A_2、I、A_1 四点共圆且 AI 为此圆的直径.



第 5 题图

由正弦定理, 有 $A_2A_1=AI\sin\angle A_2IA_1=AI\sin(90^\circ+\dfrac{1}{2}\angle A)$, 即

$A_2A_1=AI\cdot\cos\dfrac{\angle A}{2}=AF$. 所以 $2A_2A_1=AF+AE$.

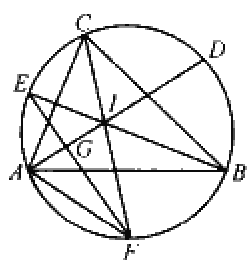
同理, $2B_1B_2=BD+BF$, $2C_1C_2=CD+CE$.

所以 $2(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)=AB+BC+CA$.

6. 证明　如图, 设 G 是 AD 和 EF 的交点, 显然 $\angle FAB=\angle FCB$, $\angle AFE=\angle ABE$.

在 $\triangle AFG$ 中, $\angle AFG+\angle FAG=\angle AFE+\angle FAB+\angle BAD=\angle ABE+\angle BCF+\angle BAD=90^\circ$.

所以 $\angle AGF=90^\circ$, 即 $AD\perp EF$.



第 6 题图

7. 证明　如图, 设 I 是 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心, 则 $\angle NIC=\angle ABI=\dfrac{B}{2}$, $\angle MIB=\angle ACI=\dfrac{C}{2}$, 又 $\angle BIC=90^\circ+\dfrac{A}{2}$, 所以 $\angle MIB+\angle BIC+\angle NIC=180^\circ$. 即 M、N、I 三点共线. 必要性得证.

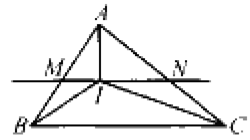
下证充分性, 设 M、I、N 三点共线.

因为 $\angle AMN=\angle ABI+\angle MIB=\angle NIC+\angle ACI=\angle ANM$.

所以 $\angle BMI=\angle INC$, $AM=AN$, 又 AI 平分 $\angle MAN$, 所以 $MI=NI$.

因为$\triangle BMI\backsim\triangle INC$，所以$\frac{BM}{IN}=\frac{BI}{IC}$，所以$\frac{BM}{MI}=\frac{BI}{IC}$，

又$\angle BMI=\angle BIC$，所以$\triangle BMI\backsim\triangle BIC$，所以$\angle MBI=\angle CBI$，所以 BI 平分$\angle ABC$. 所以 I 为$\triangle ABC$ 的内心.



第 7 题图

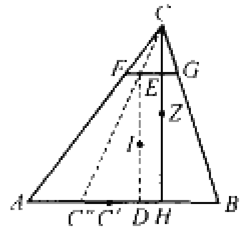
8. 证明　如图，记内心为 I，内切圆切 AB 于 D，D 关于 I 的对称点为 E，连结 CE 并延长交 AB 于 C''. 过 E 作 $FG /\!/ AB$ 交 AC 于 F，交 BC 于点 G. 所以$\triangle CFG\backsim\triangle CAB$. 因为$\odot I$ 是$\triangle CFG$ 的旁切圆，

所以 $CF+FE=\frac{CF+FG+CG}{2}$，$CA+AC''=\frac{CA+AB+BC}{2}$，

又因为 $CA+AC'=\frac{CA+AB+BC}{2}$，所以 $C'=C''$.

故 C、E、C' 三点共线.

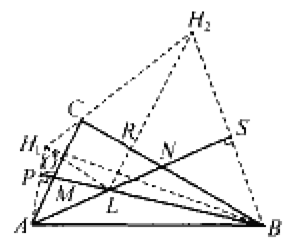
因为 $EI=ID$，$CZ=ZH$ 且 C'、D、H 三点共线，所以 C'、I、Z 三点共线.



第 8 题图

9. 证明　如图，所示添加辅助线.

因为 A、P、C、B 四点共圆，所以$\angle PAC=\angle CBL$，同理，$\angle CAL=\angle SBC$，所以$\angle H_1AL=\angle H_2BL$. 又$\angle PH_1L=90°-\angle PLH_1=\angle BLR$，所以$\triangle ALH_1\backsim\triangle BH_2L$，所以$\frac{AH_1}{BL}=\frac{AL}{BH_2}=\frac{LH_1}{H_2L}=K$. 又$\triangle AH_1Q\backsim\triangle BLR$，所以$\frac{H_1Q}{LR}=\frac{AH_1}{BL}=k$，同理，$\frac{LQ}{H_2R}=k$.



第 9 题图

设 $H_2R=x$，$RL=y$，则 $LQ=kx$，$QH_1=ky$.

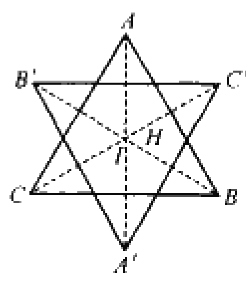
因为四边形 $CQLR$ 为矩形，所以 $CR=kx$，$CQ=y$.

所以 $\tan\angle QCH_1=k$，$\tan\angle RCH_2=\frac{1}{k}$. 所以$\angle QCH_1+\angle RCH_2=90°$.

所以 H_1、C、H_2 三点共线.

第 2 讲　三角形五心间的关系及应用

1. 证明　如图，显然 I 为$\triangle A'B'C'$ 的外心. 若点 B 在$\odot I$ 上，则 $BI=B'I=C'I=2IH$，又$\angle IHB=90°$，所以$\angle IBH=30°$. 所以$\angle ABC=60°$.



第 1 题图

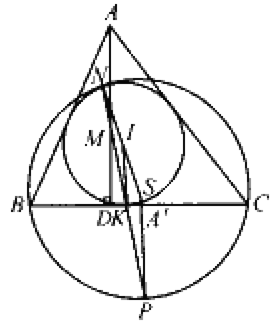
2. 证明　如图，当 $AB=AC$ 时，显然，这两个圆的圆心距等于这两个圆的半径之差.

不妨假设 $AB<AC$. 如图，设 BC 的中垂线交 NK 于点 P，交 BC 于点 A'. 设$\triangle BCN$ 的外心为 S，设$\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b、c，p

$=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则 $BK=p-b$，$KC=p-c$.

于是，$BK\cdot KC=(p-b)(p-c)$.

又因为 $BD=c\cdot\cos B=\frac{1}{2a}(c^2+a^2-b^2)$，$KA'=BA'-BK=\frac{1}{2}(b-c)$，$DK=BK-BD=\frac{1}{a}(b-c)(p-a)$，设 $\angle MKD=\varphi$，



第 2 题图

则 $\tan\varphi=\frac{MD}{DK}=\frac{\frac{1}{2}aAD}{(b-c)(p-a)}=\frac{S_{\triangle ABC}}{(b-c)(p-a)}$.

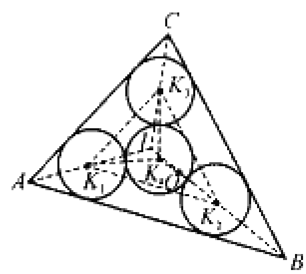
设 r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径，则 $NK=2r\sin\varphi$，$KP=KA'\sec\varphi$.

于是，$NK\cdot KP=2r\tan\varphi\cdot KA'=\frac{rS_{\triangle ABC}}{p-a}=\frac{S^2_{\triangle ABC}}{p(p-a)}=(p-b)(p-c)=BK\cdot KC$. 因此，$P$ 在 $\triangle BCN$ 的外接圆上.

因为 $IK/\!/SP$，则 $\angle PNS=\angle NPS=\angle NKI=\angle PNI$. 所以，$N$、$I$、$S$ 三点共线.

因此，$\odot I$ 与 $\triangle BCN$ 的外接圆相切于点 N.

3. 证明　如图，设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，外心为 O. 连结 AI、BI、CI、K_1K_2、K_2K_3、K_3K_1、K_4K_1、K_4K_2、K_4K_3.



第 3 题图

因为 $\triangle ABC$ 的三边与 $\odot K_1$、$\odot K_2$、$\odot K_3$ 相切，所以，K_1 在 AI 上，K_2 在 BI 上，K_3 在 CI 上.

设圆半径为 r.

因为 AB 是 $\odot K_1$ 和 $\odot K_2$ 的公切线，且 $\odot K_1$ 和 $\odot K_2$ 是等圆，所以，K_1、K_2 到 AB 的距离都是 r.

故 $K_1K_2/\!/AB$.

同理，$K_1K_3/\!/AC$，$K_2K_3/\!/BC$.

所以，$\frac{IK_1}{IA}=\frac{IK_2}{IB}=\frac{IK_3}{IC}$. 故 $\triangle ABC$ 和 $\triangle K_1K_2K_3$ 关于 I 位似.

因为 $K_4K_1=K_4K_2=K_4K_3=2r$，所以，K_4 是 $\triangle K_1K_2K_3$ 的外心.

又 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，所以，I、K_4、O 三点共线.

4. 证明　如图，(1)如图 2-49，因为 $\angle BJI=\frac{\widehat{AF}^\circ}{2}+\frac{\widehat{BD}^\circ}{2}=\frac{\widehat{BF}^\circ}{2}+\frac{\widehat{CD}^\circ}{2}=\angle BIJ$，所以，$BI=BJ$. 从而，$BN$ 是 $\angle ABC$ 的平分线，则 B、N、E 三点共线，$BN\perp IJ$.

同理，$CM\perp GH$.

因此，D、N、Q、M 四点共圆. 进而，有 $\angle DNM=\angle DQM=\frac{\widehat{AF}^\circ+\widehat{CD}^\circ}{2}=\frac{\angle A+\angle C}{2}$，

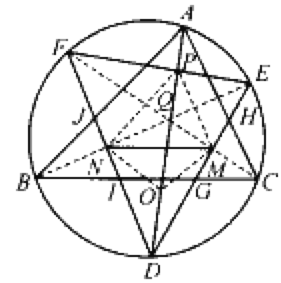
$\angle DMN=\dfrac{\angle A+\angle B}{2}$，$\angle MDN=\dfrac{\angle B+\angle C}{2}$.

(2)$\angle NPF=\dfrac{\angle B+\angle C}{2}$，$\angle EPM=\dfrac{\angle B+\angle C}{2}$.

从而，$\angle NOM=2\angle MDN=\angle B+\angle C$，

$\angle NPM=\pi-\angle NPF-\angle FPM=\pi-\angle B-\angle C$.

所以，N、O、M、P 四点共圆.



第 4 题图

5. 解　如图，设 M 是$\triangle ABP$ 的内心.

由$\angle APB=60°$，有$\angle BAP+\angle ABP=120°$. 所以，$\angle AMB=180°-(\angle BAM+\angle ABM)=180°-\dfrac{1}{2}\times120°=120°$.

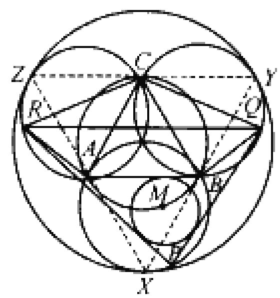
因为$\angle ACB=60°$，所以，M 是$\triangle ABC$ 外接圆上的一点.

同理可证，$\triangle BQC$ 和$\triangle CRA$ 的内心也在$\triangle ABC$ 外接圆上.

易知，顶点在给定圆上、面积最大的三角形是圆内接等边三角形.

故以$\triangle APB$、$\triangle BQC$、$\triangle CRA$ 的内心为顶点的面积最大的三角形全等于$\triangle ABC$，因而，它的面积等于 1.

这样的三角形是存在的，例如，可以选择所作的三个三角形均为等边三角形.



第 5 题图

同样地，$\triangle PQR$ 面积最大的问题也可转化为顶点在给定圆上的等边三角形问题.

因为$\angle APB=60°$，点 P 在弧$\overset{\frown}{ACB}$关于 AB 对称的弧上，而此弧在与$\triangle ABC$ 外接圆同心、半径是$\triangle ABC$ 外接圆半径 2 倍的圆内(含边界).

这同样适用于 Q 和 R，故$\triangle PQR$ 的面积不大于所有三个顶点都在这个较大圆上的等边三角形的面积.

实际上，可以选择 $P=X$ 为 C 关于 AB 的对称点；$Q=Y$ 为 A 关于 BC 的对称点；$R=Z$ 为 B 关于 CA 的对称点. 此时，这个面积最大的三角形可以被分割成四个与$\triangle ABC$ 全等的三角形. 因此，它的面积等于 4.

6. 证明　若$\triangle ABC$ 为等边三角形，即 O 与 I 重合，其结论显然成立.

若点 O 在点 I 与 C 之间，如图，作 $CE\perp AB$ 于 E，则$\angle EIB=90°-\dfrac{1}{2}\angle ABC$.

$\angle ODB=90°-\dfrac{1}{2}\angle ABC$.

于是$\angle OIB+\angle ODB=180°$.

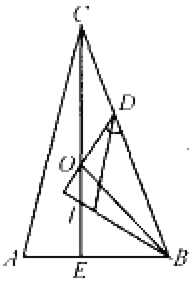
所以点 B、I、O、D 四点共圆，

所以$\angle IDB=\angle IOB$.

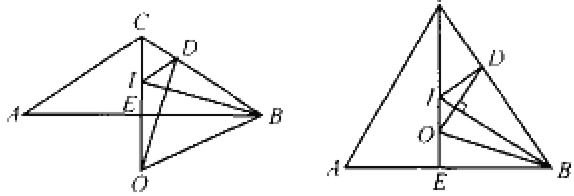
而$\angle IOB=\frac{1}{2}\angle AOB=\angle ACB$.

所以$\angle IDB=\angle ACB$，故 $ID/\!/AC$.

若点 I 位于点 O 与 C 之间，如图(2)所示，同法可证 $ID/\!/AC$.



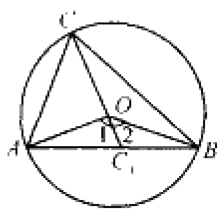
第 6 题图(1)



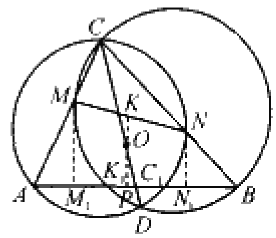
(1) (2)

第 6 题图(2)

7. 证明　设 O 是$\triangle ABC$ 的外心，CO 交 AB 于点 C_1，CD 交 AB 于点 P. 在图中，$\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}=\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC}=\frac{\sin 2B}{\sin 2A}$，则 CD 过点 O 等价于 $P=C_1$，即$\frac{AP}{BP}=\frac{\sin 2B}{\sin 2A}$.



第 7 题图(1)



第 7 题图(2)

如图，设 M_1、K_1、N_1 分别是 M、K、N 在 AB 上的投影. AB 的中垂线过点 K 等价于 $AM_1=BN_1$，即$\frac{AM}{BN}=\frac{\cos B}{\cos A}$.

因为$\angle MAD=\angle BND$，$\angle AMD=\angle NBD$，

则$\triangle AMD\backsim\triangle NBD$. 故$\frac{AM}{BN}=\frac{MD}{BD}=\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle BCD}$.

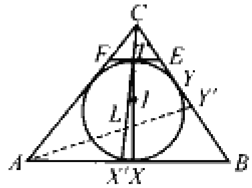
$$从而，\frac{AP}{BP}=\frac{\sin\angle ACP\cdot\dfrac{CP}{\sin A}}{\sin\angle BCP\cdot\dfrac{CP}{\sin B}}=\frac{AM\sin B}{BN\sin A}=\frac{\cos B\cdot\sin B}{\cos A\cdot\sin A}=\frac{\sin 2B}{\sin 2A}.$$

故结论成立.

8. 证明　如图，过 T 作$\odot I$ 的切线交 BC 于点 E，交 AC 于点 F.

易得 $EF/\!/AB$. 所以$\triangle CEF\backsim\triangle CBA$.

又 T 是$\triangle CEF$ 的旁切圆与 EF 的切点，所以 X' 是$\triangle ABC$ 的旁切圆与 AB 的切点.



第 8 题图

记 p 为$\triangle ABC$ 的半周长，a 为 BC 长，b 为 AC 长，c 为 AB 长.

则 $AX'=BX=p-b$.

设 AL 与 BC 交于点 Y'. 由正弦定理得：

$$\frac{CY'}{BY'}=\frac{CY'}{AY'}\cdot\frac{AY'}{BY'}=\frac{\sin\angle CPY'}{\sin C}\cdot\frac{\sin B}{\sin\angle BAY'}=\frac{\sin B}{\sin C}\cdot\frac{\sin\angle CAY'}{\sin\angle ACX'}\cdot\frac{\sin\angle AX'C}{\sin\angle BAY'}\cdot\frac{\sin\angle ACX'}{\sin\angle AX'C}=\frac{b}{c}\cdot\frac{CL}{AL}\cdot\frac{AL}{X'L}\cdot\frac{AX'}{b}=\frac{p-b}{c}\cdot\frac{CL}{X'L}.$$

因为 $AB/\!/EF$，所以$\frac{CT}{CX'}=\frac{r}{r_c}=\frac{s}{p}\cdot\frac{p-c}{s}=\frac{p-c}{p}$，（其中 r、r_c 分别表示$\triangle ABC$ 的内切圆半径，和对应点 C 的旁切圆半径，S 为$\triangle ABC$ 的面积.）

因为 $CT=X'L$，所以 $X'T=CL$，$\frac{X'L}{CL}=\frac{CT}{X'T}=\frac{CT}{CT-CX'}=\frac{p-c}{c}$.

所以$\frac{CY'}{BY'}=\frac{p-b}{c}\cdot\frac{c}{p-c}=\frac{p-b}{p-c}$.

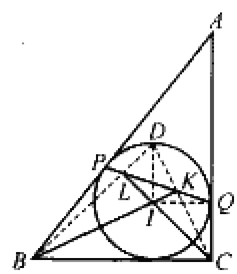
所以 Y' 是对应点 A 的$\triangle ABC$ 的旁切圆与边 BC 的交点，$BY'=p-c$，又 $BY=p-b$.

所以 A、L、Y 三点共线当且仅当 $Y=Y'$，即 $BY=BY'$.

即　$p-b=p-c$，所以 $b=c$，即 $AB=AC$.

9. 证明　如图，设 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$\angle CAB=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle BCA=\gamma$. 设 BL、CK 交于点 D. 由于$\triangle PAQ$ 是等腰三角形，所以

$\angle BKL=\angle APK-\angle ABK=\frac{\pi-\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\angle ACB$.



第 9 题图

又因为$\angle IKL=\angle BKL=\frac{1}{2}\angle ACB=\angle ACI$，所以，$I$、$K$、$Q$、$C$ 四点共圆.

于是$\angle IKC=\angle IQC=\frac{\pi}{2}$. 同理$\angle ILB=\frac{\pi}{2}$.

因此，B、L、K、C 四点共圆，I、L、D、K 四点共圆，且 BC 是$\triangle CLK$ 的外接圆直径，ID 是$\triangle ILK$ 的外接圆直径.

在$\triangle ILK$ 中，由正弦定理得　$ID=\frac{LK}{\sin\angle LDK}=\frac{LK}{\cos\angle LCK}$；

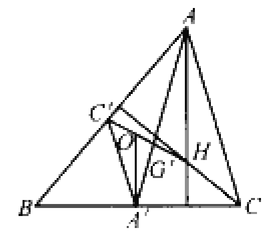
在$\triangle CLK$ 中，由正弦定理得　$a=\frac{LK}{\sin\angle LCK}$，于是，有 $ID=a\tan\angle LCK$.

因为$\angle LCK=\angle IQK=\frac{\alpha}{2}$，所以，$ID=a\tan\frac{\alpha}{2}$.

另一方面，$r=AQ\tan\frac{\alpha}{2}$，$AQ=\frac{1}{2}(b+c-a)$，其中r为$\triangle ABC$的内切圆半径.

于是，$\triangle ILK$的外接圆与$\triangle ABC$的内切圆相切，当且仅当$\triangle ILK$的外接圆直径等于$\triangle ABC$的内切圆半径，当且仅当$r=ID\Leftrightarrow\frac{1}{2}(b+c-a)=a\Leftrightarrow b+c=3a$.

10．解　如图(1)，设点O、H分别是$\triangle ABC$的外心和垂心．若A'、C'分别是BC、AB的中点，则$AH/\!/OA'$，$CH/\!/OC'$，$AC/\!/A'C'$，故$\triangle AHC\backsim\triangle A'OC'$，有$AH=2A'O$．记$AA'$与$OH$交于点$G'$，则$\triangle A'G'O\backsim\triangle AG'H$.



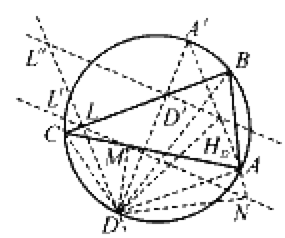
第10题图(1)

所以，$AG'=2A'G'$，$G'H=2OG'$．故G'是$\triangle ABC$的重心.

设直线h_A通过点A和$\triangle BCD$的垂心H_A，直线h_B通过点B和$\triangle ACD$的垂心H_B，直线h_C通过点C和$\triangle ABD$的垂心H_C，直线h_D通过点D和$\triangle ABC$的垂心H_D．为了方便起见，对每一点P用P代表向量$\overrightarrow{OP}$，易知$\triangle BCD$的重心G_A满足$G_A=\frac{B+C+D}{3}$．因为H_A是$\triangle BCD$的垂心，根据前面所述，有$|G_AH_A|=2|OG_A|$，即$H_A-G_A=2G_A$，满足$H_A=3G_A=B+C+D$．类似地，$H_B=3G_B=A+C+D$，$H_C=3G_C=A+B+D$，$H_D=3G_D=A+B+C$．由此

$$S=\frac{A+H_A}{2}=\frac{B+H_B}{2}=\frac{C+H_C}{2}=\frac{D+H_D}{2}=\frac{A+B+C+D}{2}.$$ 故h_A、h_B、h_C、h_D共点.

如图(2)，过点D分别作BC、CA、AB的垂线，垂足分别为L、M、N．则L、M、N共线，此直线即为点D关于$\triangle ABC$的西姆松线l_D.



第10题图(2)

若L'是DL与$\triangle ABC$外接圆的交点，由$\angle AL'D=\angle ACD=\angle MLD$有$AL'/\!/LM$.

设A'为AH_D与$\triangle ABC$外接圆的另一交点.

因为$\angle A'CB=\angle A'AB=\angle BCH_D$，故$BC$是$A'H_D$的垂直平分线.

设$A'D$与BC交于点D'，$D'H_D$与DL交于点L''.

则L是DL''的中点．由$\angle D'L''L=\angle A'=\angle AL'D$，知$H_DL''/\!/AL'/\!/LMN$，因此，$l_D$即为$LMN$，经过$DH_D$的中点.

同理，l_A过AH_A的中点，l_B过BH_B的中点，l_C过CH_C的中点.

根据前面结论，这些中点为同一点S．则l_A、l_B、l_C、l_D交于点S．当D移动时，$S=$

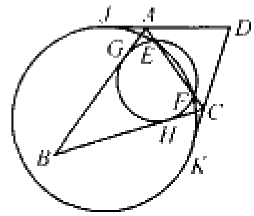
$\frac{D+H_D}{2}$是 DH_D 的中点. 因为 $H_D=H$，所以，$\left|S-\frac{H}{2}\right|=\left|\frac{D}{2}\right|=\frac{R}{2}$.

这里，R 是$\triangle ABC$ 外接圆半径. 即 S 的轨迹是以线段 OH 中点为圆心，$\frac{R}{2}$ 为半径的圆.

第三章 与圆有关的重要问题

第 1 讲 圆幂和根轴

1. 证明 如图，所求的充要条件是 $AB+AD=CB+CD$.



第 1 题图

1°. 必要性的证明

设过 E、F 两点的另一圆分别与 DA 延长线和 DC 延长线相切于 J 和 K 两点，则有

$$\begin{aligned}AB+AD&=BG+GA+AD=BG+JA+AD\\&=BG+JD=BH+KD\\&=BH+KC+CD=BH+HC+CD\\&=CB+CD.\end{aligned}$$

2°. 充分性的证明

设凸四边形 $ABCD$ 满足条件 $AB+AD=CB+CD$.

在 DA 延长线和 DC 延长线上分别取 J 点和 K 点，使 $AJ=AG$，$CK=CH$，于是

$DJ=JA+AD=AG+AD=AB+AD-BG=CB+CD-BH=CH+CD=DK$.

过 J 点和 K 点分别作 DJ 和 DK 的垂线，以两垂线交点为圆心作通过 J 点和 K 点的圆.

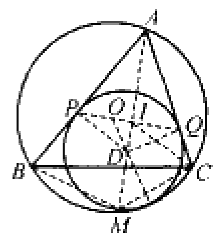
因为 $AJ=AG$，$CK=CH$，所以 A 点和 C 点关于原有圆的幂分别等于这两点关于所作圆的幂.

又因为直线 AC 与原有的圆相交于 E 和 F 两点，所以 EF 是两圆的公共弦(直线 AC 是两圆的根轴).

至此，我们证明了所作的与 DA 延长线和 DC 延长线相切的圆通过 E，F 两点.

评注 可以通过必要条件来求充要条件 $AB+AD=CB+CD$.

2. 证明 如图，延长 AI 交$\odot O$ 于 M，设$\odot O$ 的半径为 R，则点 L 对$\odot O$ 的幂为 $R^2-LO^2=LA\cdot LM$，于是



第 2 题图

$$\begin{aligned}LO^2&=R^2-LA\cdot LM=R^2-LA\cdot(IM-LI)\\&=R^2-LA\cdot IM+LA\cdot LI\\&=R^2-LA\cdot IM+LP^2,\end{aligned}$$

由$\angle MIC=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)=\angle BCM+\frac{1}{2}\angle C=\angle MCI$，知

$MI=MC=2R\cdot\sin\frac{1}{2}\angle A=2R\cdot\frac{PL}{AL}$.

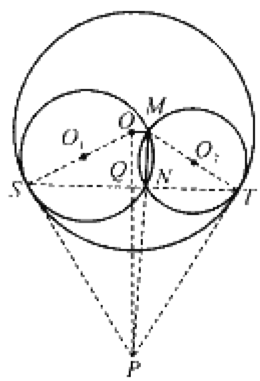
从而，$LO^2=R^2-LA\cdot 2R\cdot\frac{PL}{AL}+LP^2=(R-PL)^2$.

由此，即知$\odot L$与$\odot O$相切.

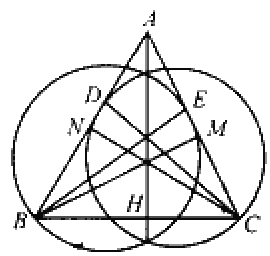
3. 证明　如图，连OS、OT、ST，作公切线SP、TP相交于P，则得$PS=PT$，由此即知自P点向$\odot O_1$和$\odot O_2$所作切线长相等，故点P在这两圆$\odot O_1$和$\odot O_2$的根轴上，且有$PS^2=PN\cdot PM$.

连OP交ST于点Q，则$OP\perp ST$，且$PQ\cdot PO=PS^2=PN\cdot PM$，故$O$、$Q$、$N$、$M$四点共圆.

由此，即有$OM\perp MN\Leftrightarrow OQ\perp QN\Leftrightarrow N$在直线$ST$上$\Leftrightarrow S$、$N$、$T$三点共线.



第 3 题图



第 4 题图

4. 证明　如图，设以BE为直径的圆为$\odot O_1$，以CD为直径的圆为$\odot O_2$，BM、CN是高线，H为垂心，则M在$\odot O_1$上，N在$\odot O_2$上.

因为，B、C、M、N四点共圆，所以$HB\cdot HM=HC\cdot HN$，即H是关于两圆的等幂点. 所以H在$\odot O_1$和$\odot O_2$的根轴上.

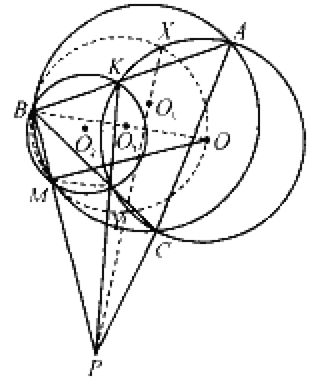
5. 证明　如图，设$\triangle ABC$和$\triangle BKN$的外接圆圆心分别为O_1、O_2，由题设，推知O、O_1、O_2三点不共线(否则B和M重合)，而直线AC、KN、BM分别为这三个圆中两两圆的根轴，故它们必相交于一点，不妨设交于点P.

由$\angle PMN=\angle BKN=\angle NCA$，知$P$、$M$、$N$、$C$四点共圆，则$B$点对此圆$\odot PMNC$的幂等于$B$点对$\odot O$的幂，即有(设$R$为$\odot O$的半径)$BM\cdot BP=BN\cdot BC=BO^2-R^2$.

又点P对$\odot O_2$的幂等于点P对$\odot O$的幂，即有$PM\cdot PB=PN\cdot PK=PO^2-R^2$.

由上述两式相减，得$PO^2-BO^2=BP(PM-BM)=(PM+BM)(PM-BM)=PM^2$

$-BM^2$，由此有 $OM\perp BP$，故 $\angle OMB=90°$.



第 5 题图

6. 证明　如图，连 PQ，并在 PQ 上取一点 M，使得 B、C、M、P 四点共圆，则 Q 为 $\odot ABCD$ 和 $\odot BCMP$ 两圆根轴上的点，则

$QE^2=QC\cdot QB=QM\cdot PQ.$　①

此时 $\angle PMC=\angle ABC=\angle PDQ$，从而 C、D、Q、M 四点共圆，即知 P 对此圆 $\odot CDQM$ 的幂为

$PC\cdot PD=PM\cdot PQ.$　②

连 PF 交 $\odot ABCD$ 于 E'，作 $QG\perp PF$ 于 G，则 P、Q 对 $\odot ABCD$ 的幂分别为 $PC\cdot PD=PE'\cdot PF$，　③

及 $QC\cdot QB=QF^2$　④

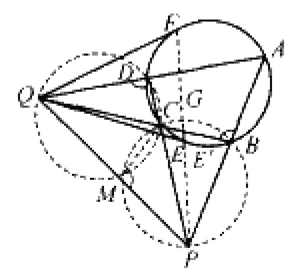
由①+②并注意③、④式，有

$QM\cdot PQ+PM\cdot PQ=PQ^2=QC\cdot QB+PC\cdot PD=QF^2+PE'\cdot PF$，

即　$PQ^2-QF^2=PE'\cdot PF=(PG-GE')\cdot PF.$　⑤

又 $PQ^2-QF^2=(PG^2+QG^2)-(QG^2+GF^2)=PG^2-GF^2$

$=(PG-GF)(PG+GF)=(PG-GE)\cdot PF.$　⑥



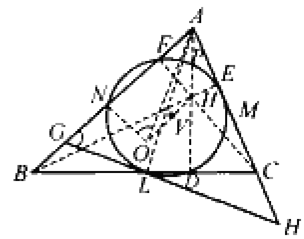
第 6 题图

比较⑤与⑥式，得 $PE'=PG-GE'=PG-GE$，即 E' 与 E 重合，故 P、E、F 三点共线.

第 2 讲　九点圆定理

1. 证明　连 AG 并延长交 BC 于 L，则 A 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，L 在 $\triangle ABC$ 的九点圆上. 又 G 是 $\triangle ABC$ 的外接圆与九点圆的内位似中心，且位似比为 $2:1$. 而 $PG:GQ=2:1$，且 P 点在外接圆上，则 Q 点必在九点圆上.

2. 证明　设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，V 是九点圆的圆心，O 和 V 对于 G 和 H 是共线且调和共轭的，考察以 O 点为起点的向量，则 $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}=3\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{3}+\frac{\overrightarrow{OB}}{3}+\frac{\overrightarrow{OC}}{3}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. 因此，$|\overrightarrow{OH}|\leqslant|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{OC}|=3R$，仅当 $A=B=C$ 时等号成立，这是不可能的. 故 $OH<3R$.



第 3 题图

3. 证明　如图，设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，连 OH，取 OH 的中点 V，则 V 为 $\triangle ABC$ 九点圆的圆心.

连 AO，则 $AO\parallel PV$，从而 $AO\perp GH$. 设 N 为 AB 的中点，连 ON，则 $ON\perp AG$，由此知 $\angle AON=\angle AGL$.

又 $\angle ACL=\angle AON$，则 $\angle ACL=\angle AGL$.

从而 $\angle BGL=\angle BGH=\angle HCL=\angle HCB$. 故 B、H、C、G 四

点共圆.

4. 证明　设 O、H 分别为$\triangle ABC$ 的外心与垂心，I、I_1、I_2、I_3 分别为$\triangle ABC$ 的内心和三个旁心. 由于 H、A、B、C 构成一老垂心组(四点中，任一点是另三点构成的三角形的垂心，此四点为垂心组)；I 与 I_1、I_2、I_3 构成一新垂心组，又$\triangle ABC$ 的外接圆是$\triangle I_1I_2I_3$ 的九点圆，从而$\triangle I_1I_2I_3$ 的外心 O'是关于 O 的 I 的对称点. 其余以此类似地推证. 从而新垂心组各点与老垂心组各点关于$\triangle I_1I_2I_3$ 的九点圆的圆心对称.

5. 证明　(1)设 E、F 分别是边 BA 的延长线、CA 的延长线上的点. 由旁心的定义，知 I_AA 平分$\angle BAC$，I_BA 平分$\angle CAE$，I_CA 平分$\angle BAF$. 又$\angle BAF=\angle CAE$，从而有 I_B、A、I_C 三点共线，且 $I_AA\perp I_BI_C$.

同理，$I_BB\perp I_AI_C$，$I_CC\perp I_AI_B$. 故$\triangle ABC$ 为$\triangle I_AI_BI_C$ 的垂足三角形，故$\triangle ABC$ 的外接圆即为$\triangle I_AI_BI_C$ 的九点圆.

(2)设 O' 为$\triangle I_AI_BI_C$ 的外心，则 $\angle O'I_BI_C=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle I_BO'I_C)=\frac{1}{2}(180^\circ-2\angle I_BI_AI_C)$. 由 I_A、I_C、A、C 四点共圆，知$\angle I_BAC=\angle I_BI_AI_C$，从而$\angle O'I_BI_C+\angle I_BAC=90^\circ$，即 $I_BO'\perp AC$.

同理，$I_AO'\perp BC$，$I_BO'\perp BA$. 故三条垂线共点于 O'.

6. 证明　设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$是单位圆上任意四点，则 $x_i^2+y_i^2=1(i=1,2,3,4)$. 由九点圆圆心是三角形外心与垂心连线的中点，得$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ACD$ 九点圆圆心坐标分别为

$$O_1\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{2},\frac{y_1+y_2+y_3}{2}\right),O_2\left(\frac{x_1+x_2+x_4}{2},\frac{y_1+y_2+y_4}{2}\right),$$

$$O_3\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{2},\frac{y_2+y_3+y_4}{2}\right),O_4\left(\frac{x_1+x_3+x_4}{2},\frac{y_1+y_3+y_4}{2}\right).$$

考虑点 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{2}\right)$，则

$$|O_1G|=\left[\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2}-\frac{x_1+x_2+x_3}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x_4^2+y_4^2}=\frac{1}{2}.$$

同理，$|O_2G|=|O_3G|=|O_4G|=\frac{1}{2}$.

故 O_1、O_2、O_3、O_4 在以 G 为圆心，$\frac{1}{2}$为半径的圆上.

第 3 讲　几类重点问题及解法

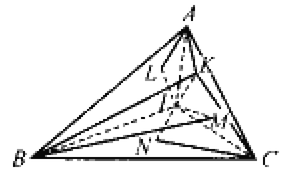
1. 证明　如图，设 I 为$\triangle ABC$ 的内心，连接 IA、IB、IC、IK、IL、IM、IN.

因为$\angle BAI=\angle CAI$，且$\angle BAL=\angle CAK$，

所以$\angle LAI=\angle IAK$，又$AL=AK$，$AI=AI$，

所以$\triangle ALI\cong\triangle AKI$，于是$IL=IK$.

同理，$IM=IK$，$IN=IM$，从而$IK=IL=IM=IN$，即K、L、M、N四点共圆.

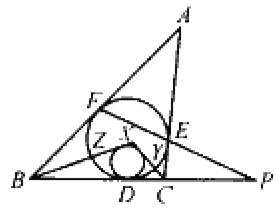


第1题图

2. 证明　如图，如果$EF/\!/BC$，则$AB=AC$，AD是$EFZY$的对称轴，因而四边形$EFZY$是圆内接四边形.

如果$EF\not\parallel BC$，设BC与FE的延长线相交于P，直线FEP截$\triangle ABC$，由梅涅劳斯定理，有

$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，又$AF=AE$，即$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CE}{FB}=1$.



第2题图

又因为$BZ=BD=BF$，$CY=CD=CE$，

所以$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CY}{BZ}=1$，又$ZX=XY$，即$\frac{XZ}{BZ}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CY}{YX}=1$，由梅涅劳斯逆定理，知$Z$、$Y$、$P$三点共线，于是，

$PE\cdot PF=PD^2=PY\cdot PZ$，即$PE\cdot PF=PY\cdot PZ$. 由割线定理的逆定理，有$E$、$F$、$Z$、$Y$四点共圆.

3. 证明　如图，在线段PQ上取一点G，使P、B、C、G四点共圆，则$\angle CGP=\angle CBA=\angle CDQ$，因此$D$、$C$、$G$、$Q$四点共圆.

因为$QE^2=QC\cdot QB=QG\cdot QP$，

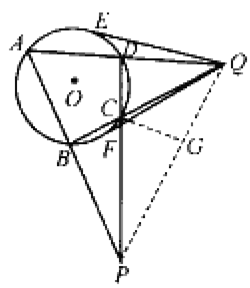
所以$QP^2-QE^2=QP^2-QG\cdot QP=QP\cdot GP$.

又因为$OP^2-OE^2=(OP+OE)(OP-OE)=PC\cdot PD=PG\cdot PQ$.

所以$QP^2-QE^2=OP^2-OE^2$，

所以$PE\perp OQ$，又$EF\perp OQ$，

所以P、E、F三点共线.



第3题图

4. 证明　如图，因为CD为$\odot O$与$\odot O_3$的公共弦，

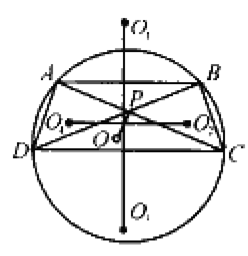
所以$OO_3\perp CD$.

又因为$\angle APO_1+\angle PCD=\angle APO_1+\angle PBA=\angle APO_1+\frac{1}{2}\angle AO_1P=90^\circ$，

所以$O_1P\perp CD$，从而$OO_3/\!/O_1P$.

因为AB为$\odot O$与$\odot O_1$的公共弦，

所以$OO_1\perp AB$.



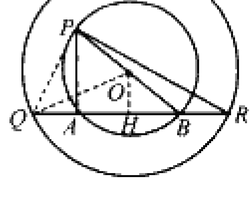
第4题图

又因为$\angle COP_1+\angle PAB=\angle CPO_3+\angle PDC=\angle CPO_3+\frac{1}{2}\angle PO_3C=90^\circ$，

所以$O_3P\perp AB$，从而$OO_1\parallel O_3P$．故四边形O_1PO_3O为平行四边形，有O_1O_3与OP互相平分，即O_1O_3过线段OP的中点．

依上可类似地证明，O_2O_4过线段OP的中点，因此，OP、O_1O_3、O_2O_4三线共点．

5．证明　如图，设两同心圆圆心为O，引小圆的直径PB，则O是PB的中点，由中线定理，



第5题图

$PQ^2+QB^2=2QO^2+2OP^2$．设$OQ=R$，

$OP=r$，则$PQ^2+QB^2=2R^2+2r^2$．　①

同理，$RP^2+RB^2=2R^2+2r^2$．　②

而$QR^2=(QB+BR)^2=QB^2+BR^2+2\cdot QB\cdot BR$．

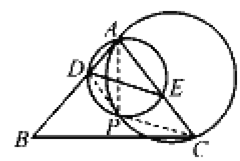
作$OH\perp AB$于H，则$OQ^2-OB^2=QH^2-HB^2=(QH+HB)(QH-HB)=QB\cdot QA$，即$QB\cdot QA=R^2-r^2$．

所以$QR^2=QB^2+BR^2+2(R^2-r^2)$　③

①＋②＋③，得

$PQ^2+PR^2+QR^2=6R^2+2r^2$（定值）．

6．证明　如图，作过C点且与AB相切于A点的圆，交$\triangle ADE$的外接圆于P点（不同于A点），四边形$ADPE$是圆内接四边形，$\angle CEP=\angle ADP$．又AD是圆的切线，$\angle DAP=\angle ECP$，$\triangle APD\backsim\triangle PCE$，得$\frac{PA}{PC}=\frac{AD}{CE}$．根据已知，$AD:CE=DB:AE$，所以

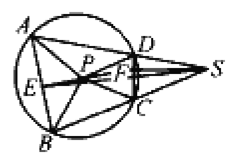


第6题图

$$\frac{AD}{CE}=\frac{AD+DB}{CE+AE}=\frac{AB}{AC}.$$

这是一个定值，由此可知$\triangle APC$形状一定，并且A、C是定点，点P也是定点，故圆ADE恒过定点P．

7．证明　如图，若直线AD、BC不平行，设其交点为S，因为$ABCD$为圆内接四边形，则$\triangle ASB\backsim\triangle CSD$．从而，$\frac{AB}{AS}=\frac{CD}{CS}$



第7题图(1)

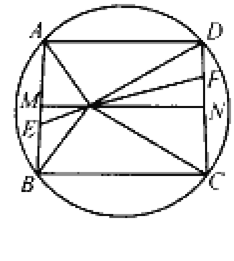
又因为　$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}$，即$\frac{AE}{AB}=\frac{CF}{CD}$．

有　$\frac{AE}{AS}=\frac{CF}{CS}$，故$\triangle ASE\backsim\triangle CSF$，

所以　$\angle ASE=\angle CSF$，且$\frac{SE}{SF}=\frac{SA}{SC}=\frac{AB}{CD}=\frac{PE}{PF}$，

从而　$\angle ESP=\angle FSP$．于是$\angle ASP=\angle BSP$．

所以 P 到 AD、BC 的距离相等，故 $S_{\triangle APD}:S_{\triangle BPC}=AD:BC$ 为常数.

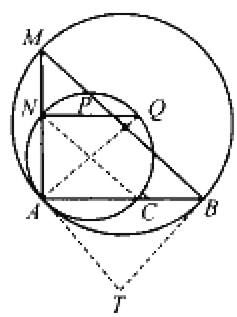


第 7 题图(2)

当 $AD/\!/BC$ 时(如图)，$ABCD$ 为等腰梯形，且 $AB=CD$，从而 $BE=DF$.

设 M、N 分别为 AB、CD 的中点，则 $ME=NF$，且 E、F 到 MN 的距离相等. 于是，EF 的中点 P 在 MN 上，从而，P 到 AD 和 BC 的距离相等，故 $S_{\triangle APD}:S_{\triangle BPC}=AD:BC$.

8. 解　当动点 M 在大圆优弧的不同部位时，相应的图形略有差异(如图)，我们所叙述的求解过程统一地适用于各种情形.



第 8 题图

设直线 l 与内圆的另一交点是 C，连 NC，过 A 点和 B 点作外圆的切线相交于 T 点.

因为 $\angle TAB=\angle AMB=\angle ANC$，

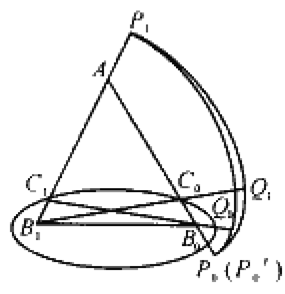
所以 $MB/\!/NC$.

所以 $\angle CNP=\angle MPN=\theta$.

设直线 PN 与内圆的另一交点是 Q，则 A、C、N、Q 四点都在内圆周上，因而，$\angle CAQ=\angle CNP=\angle MPN=\theta$. 由此可知，$A$、$Q$、$P$、$B$ 四点共圆.

综上所述，Q 点是内圆上的定点，$\angle CAQ=\theta$，并且 P 点在 $\triangle ABQ$ 的外接圆上，因此，我们可以按以下方式作出 P 点的轨迹：在内圆被直线 l 截得的优弧上取 Q 点，使 $\angle BAQ=\theta$. 然后作 $\triangle ABQ$ 的外接圆，该外接圆周在 $\angle ABT$ 外的那段圆弧即为所求的轨迹.

9. 证明　如图，(1)显然 $B_0P_0=B_0Q_0$，并由圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 和 $\overset{\frown}{Q_0P_1}$，$\overset{\frown}{Q_0P_1}$ 和 $\overset{\frown}{P_1Q_1}$，$\overset{\frown}{P_1Q_1}$ 和 $\overset{\frown}{Q_1P'_0}$ 分别相内切于点 Q_0、P_1、Q_1，得 $C_1B_0+B_0Q_0=C_1P_1$，$B_1C_1+C_1P_1=B_1C_0+C_0Q_1$ 以及 $C_0Q_1=C_0B_0+B_0P'_0$. 四式相加，利用 $B_1C_1+C_1B_0=B_1C_0+C_0B_0$ 以及 P'_0 在 B_0P_0 或其延长线上，有 $B_0P_0=B_0P'_0$.



第 9 题图

从而可知点 P'_0 与点 P_0 重合. 由于圆弧 $\overset{\frown}{Q_1P_0}$ 的圆心 C_0，圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 的圆心 B_0 以及 P_0 在同一直线上，所以圆弧 $\overset{\frown}{Q_1P_0}$ 和 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 相内切于点 P_0.

(2)现在分别过点 P_0 和 P_1 引上述相应相切圆弧的公切线 P_0T 和 P_1T 交于点 T. 又过点 Q_1 引相应相切圆弧的公切线 R_1S_1，分别交 P_0T 和 P_1T 于点 R_1 和 S_1. 连接 P_0Q_1 和 P_1Q_1，得等腰三角形 $P_0Q_1R_1$ 和 $R_1Q_1S_1$. 基于此，我们可有

$\angle P_0Q_1P_1=\pi-\angle P_0Q_1R_1-\angle P_1Q_1S_1=\pi-(\angle P_1P_0T-\angle Q_1P_0P_1)-(\angle P_0P_1T-$

$\angle Q_1P_1P_0$).

而 $\pi-\angle P_0Q_1P_1=\angle Q_1P_0P_1+\angle Q_1P_1P_0$，代入上式后，即得

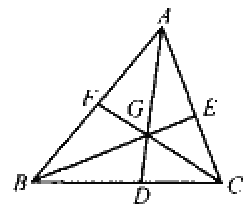
$\angle P_0Q_1P_1=\pi-\frac{1}{2}(\angle P_1P_0T+\angle P_0P_1T)$.

同理可得 $\angle P_0Q_0P_1=\pi-\frac{1}{2}(\angle P_1P_0T+\angle P_0P_1T)$. 所以 P_0、Q_0、Q_1、P_1 四点共圆.

第四章　几何不等式与几何变换

第1讲　几何不等式

1. 证明　如图，设$\triangle ABC$的三条中线分别是AD、BE、CF，它们交于重心G.



第1题图

因为 $GA+GB>AB$,

$GB+GC>BC$,

$GC+GA>CA$.

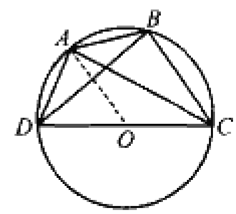
三式相加得 $2(GA+GB+GC)>AB+BC+CA$.

又 $GA=\frac{2}{3}AD$，$GB=\frac{2}{3}BE$，$GC=\frac{2}{3}CF$.

所以 $\frac{4}{3}(AD+BE+CF)>AB+BC+CA$.

所以 $AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+CA)$.

2. 证明　如图



第2题图

(1)因为 $\angle ABC=120^\circ$，$\angle ABD=30^\circ$,

所以 $\angle DBC=90^\circ$，则 DC 过圆心 O.

易得$\triangle ADO$是正三角形且边长为$\frac{C}{2}$.

设 $\angle BDC=\theta$，则 $\angle ADB=60^\circ-\theta$.

在$\triangle ABD$中，由正弦定理，得$\frac{AD}{\sin30^\circ}=\frac{AB}{\sin(60^\circ-\theta)}$.

则 $a=c\sin(60^\circ-\theta)$，又 $b=c\sin\theta$.

所以 $a+b=c\sin(60^\circ-\theta)+c\cdot\sin\theta=2c\cdot\sin30^\circ\cdot\cos(30^\circ-\theta)\leqslant c$

即　$c\geqslant a+b$.

(2)要证 $|\sqrt{c+a}-\sqrt{c+b}|=\sqrt{c-a-b}$,

只要证　$2c+a+b-2\sqrt{(c+a)(c+b)}=c-a-b$,

只要证　$2a+2b+c=2\sqrt{(c+a)(c+b)}$.

即证 $a^2+b^2+ab=\frac{3}{4}c^2$

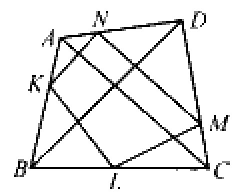
在△ABC 中，由余弦定理得

$AC^2=a^2+b^2+ab$.

在△ADC 中，由 $AC^2=CD^2-AD^2=c^2-(\frac{c}{2})^2=\frac{3}{4}c^2$.

所以 $a^2+b^2+ab=\frac{3}{4}c^2$ 成立，即命题得证.

3. 证明　如图，设 $S_{四边形ABCD}=1, \frac{AN}{AD}=\alpha, \frac{DM}{DC}=\beta, \frac{LC}{BC}=\gamma, \frac{BK}{BA}=\delta, S_{\triangle ABD}=S', S_{\triangle ABC}=S''$.



第 3 题图

则 $S_1=S_{\triangle AKN}=\alpha(-\delta)S', S_2=S_{\triangle BKL}=\delta(1-\gamma)S''$,

$S_3=S_{\triangle CLM}=\gamma(1-\beta)(1-S'), S_4=S_{\triangle DMN}=\beta(1-\alpha)(1-S'')$.

要证原不等式成立，只要证

$$\sqrt[3]{\alpha(1-\delta)S'}+\sqrt[3]{\delta(1-\gamma)S''}+\sqrt[3]{\gamma(1-\beta)(1-S')}+\sqrt[3]{\beta(1-\alpha)(1-S'')}\leqslant 2. \quad ①$$

由均值不等式，有

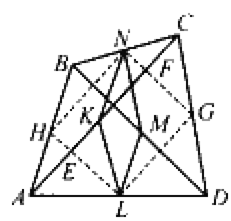
$\sqrt[3]{\alpha(1-\delta)S'}\leqslant\frac{\alpha+1-\delta+S'}{3}, \sqrt[3]{\delta(1-\gamma)S''}\leqslant\frac{\delta+1-\gamma+S''}{3}$,

$\sqrt[3]{\gamma(1-\beta)(1-S')}\leqslant\frac{\gamma+1-\beta+1-S'}{3}, \sqrt[3]{\beta(1-\alpha)(1-S'')}\leqslant\frac{\beta+1-\alpha+1-S''}{3}$.

将以上四式相加，即知①式成立.

所以原不等式成立.

4. 证明　如图，设 AC、AD、BD、BC 的中点分别为 K、L、M、N，又设 AB、CD 的中点分别为 H、G，HL、NG 分别交 AC 于 E、F. 则 $S_{四边形HNGL}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}$.



第 4 题图

下面证明四边形 $KNML$ 在四边形 $HNGL$ 的内部，即证明点 K 和点 M 在四边形 $HNGL$ 的内部.

因为 $EF=\frac{1}{2}AC, AK=\frac{1}{2}AC$，则 $EF+AK=AC$.

所以它们的交不可能是空的.

所以点 K 在线段 EF 上.

同理，点 M 也在四边形 $HNGL$ 的内部.

所以题目结论成立.

5. 证明 因为 $\frac{\cos\alpha}{a^3}+\frac{\cos\beta}{b^3}+\frac{\cos\gamma}{c^3}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2a^3bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2b^3ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2c^3ab}$

$=\frac{1}{2abc}\left[\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}\right)+\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}\right)-3\right]$

$\geqslant\frac{1}{2abc}(2+2+2-3)=\frac{3}{2abc}$.

所以要证不等式成立.

6. 解 $S=2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$,

$P=\frac{1}{2}(a+b+c)=R(\sin A+\sin B+\sin C)$.

则 $\frac{SP}{R^3}=2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C(\sin A+\sin B+\sin C)\leqslant 6\cdot\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^4$.

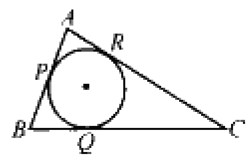
因为 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 内为上凸函数,

所以 $\frac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)\leqslant\sin\frac{A+B+C}{3}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故 $\frac{SP}{R^3}\leqslant 6\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4=\frac{27}{8}$.

当 $\angle A=\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$ 时,$\frac{SP}{R^3}$ 取得最大值 $\frac{27}{8}$.

7. 证明 如图,设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r,内心为 I.



第 7 题图

则 $PQ=2PB\cdot\sin\frac{B}{2}=2PI\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}=2r\cos\frac{B}{2}$,

同理,$PR=2r\cdot\cos\frac{A}{2}$,$QR=2r\cdot\cos\frac{C}{2}$.

又 $BC=r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$,$AC=r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$,$AB=r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)$.

所以 $\frac{BC}{PQ}+\frac{CA}{QR}+\frac{AB}{RP}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{BC\cdot CA\cdot AB}{PQ\cdot QR\cdot RP}}$

$=3\cdot\sqrt[3]{\frac{\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)}{8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}$

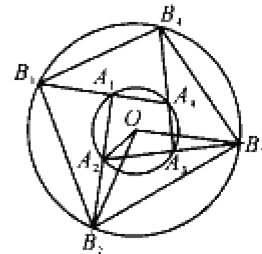
$=3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}}$.

因为 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$，

所以 $3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}}\geqslant 2\times 3=6$.

即　$\frac{BC}{PQ}+\frac{CA}{QR}+\frac{AB}{RP}\geqslant 6$.

8. 证明　如图，设圆 C_1 的半径为 r，则圆 C_2 的半径为 $2r$. 连结 OA_2、OB_2、OB_3. 在四边形 $OA_2B_2B_3$ 中，由托勒密不等式得



第 8 题图

$OA_2\cdot B_2B_3+OB_3\cdot A_2B_2\geqslant OB_2\cdot A_2B_3$，

即　$r\cdot B_2B_3+2r\cdot A_2B_2\geqslant 2r\cdot A_2B_3$，

所以 $B_2B_3+2A_2B_2\geqslant 2(A_2B_3+A_3B_3)$

同理　$B_3B_4+2A_3B_3\geqslant 2(A_3A_4+A_4B_4)$，

$B_4B_1+2A_4B_4\geqslant 2(A_4A_1+A_1B_1)$，

$B_1B_2+2A_1B_1\geqslant 2(A_1A_2+A_2B_2)$.

四个不等式相加，得

$B_1B_2+B_2B_3+B_3B_4+B_4B_1\geqslant 2(A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+A_4A_1)$，

即　$L'\geqslant 2L$.

当且仅当四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为圆 C_1 的内接正方形时"＝"成立，此时四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 也为正方形.

9. 证明　设 $30°<\angle PAB$、$\angle PBC$、$\angle PCA<120°$，

则 $\frac{PG}{PA}=\sin\angle PAB>\sin 30°$，即 $2PG>PA$.

同理　$2PM>PB$，$2PN>PC$.

所以 $2(PG+PM+PN)>PA+PB+PC$.

这与埃尔多斯—莫德尔不等式矛盾.

故命题得证.

10. 解　易知 $A_1C_1=2(p-c)\cos\frac{B}{2}$，$A_1B_1=2(p-b)\cos\frac{C}{2}$，

$B_1C_1=2p\sin\frac{A}{2}$，其中 p 为$\triangle ABC$ 的半周长.

则 $T=\sum_{i=1}^{3}(A_iC_i+B_iC_i+A_iB_i)$

$$=\sum\left[2(p-c)\cos\frac{B}{2}+2(p-b)\cos\frac{C}{2}+2p\sin\frac{A}{2}\right]$$

$$= \sum\left[(a+b-c)\cos\frac{B}{2}+(a+c-b)\cos\frac{C}{2}\right]+2p\sum\sin\frac{A}{2}$$

$$= 2\sum a\cos\frac{A}{2}+2p\sum\sin\frac{A}{2}$$

$$= 4R\sum\sin A\cdot\cos\frac{A}{2}+2R\sum\sin A\sum\sin\frac{A}{2}.$$

因为 $\sum\sin A\leqslant 3\sin\frac{A+B+C}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

同理 $\sum\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{3}{2}$.

所以 $2\sum\sin A\cdot\sum\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

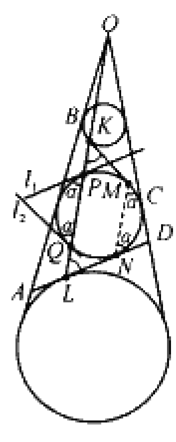
又 $2\sin A\cdot\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{3}{2}A+\sin\frac{A}{2}\leqslant 1+\sin\frac{A}{2}$.

则 $4\sum\sin A\cdot\cos\frac{A}{2}\leqslant 2\sum\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)\leqslant 2\left(3+\frac{3}{2}\right)=9$.

所以 $\frac{T}{R}\leqslant 9+\frac{9}{2}\sqrt{3}$.

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，上式"="成立.

第 2 讲 几何变换



第 1 题图

1. 证明 如图，设点 O 在线段 AB 延长线上 B 的外侧，将 KL 与圆 ω 的交点记作 P 和 Q，将边 BC 和 AD 与 ω 的切点分别记作 M 和 N. 过点 P、Q 分别作 ω 的切线 l_1 和 l_2，将切线 l_1（或 l_2）与弦 PQ 的夹角记作 α.

在以 O 为中心，将 ω_1 变为 ω 的位似变换下，过点 K 的切线 BC 变为 l_2；在将 ω_2 变为 ω 的位似变换下，直线 AD 变为 l_1. 故知 $BC\parallel l_2$，$AD\parallel l_1$. 及 $\angle CKL=\angle KLD=\alpha$. 又易得 $\angle BMN=\angle ANM$，所以四边形 $KLNM$ 为等腰梯形，所以 $PQ\parallel MN$，所以 $\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{MN}\xlongequal{m}2\alpha$.

所以该梯形的中位线经过 ω 的圆心，但 KM 的中点与 BC 的中点重合，LN 的中点也与 AD 的中点重合. 故原命题成立.

2. 证明 如图，我们来考察点 Q 和 B_1 分别位于直线 BK 的两侧，以及点 P 和 B_1 分别位于直线 BM 的两侧的情形（其余情形可作类似讨论）. 直线 QK 与 PM 相交于点 N，因此点 Q 和 P 分别是点 K 和 M 在以 N 为中心的位似变换之下的像（切线变为与自己平行的、切点在弧的中点的切线）. 从而 $\angle NQB+\angle NPB=\pi$，$\angle KB_1B+\angle KQB=\pi$，$\angle MB_1B+\angle MPB=\pi$，所以 $\angle KB_1B+\angle MB_1B=\pi$，即点 B_1 在直线 KM 上，所以 $\angle BQB_1=\angle BKB_1=\angle KNM=\angle B_1MB=\angle B_1PB$.

又因为 $\angle QBP+\angle QNP=\pi$

所以四边形 BPB_1Q 为平行四边形.

3. 证明　如图,作变换 $T(\overrightarrow{DE})$,则 $D\to E$. 设 $C\xrightarrow{T(\overrightarrow{DE})}O$,则 $OE \mathrel{\underline{\parallel}} CD$.

所以 $\angle FEO=\angle Q$,$EO:QR=CD:QR=EF:PQ$.

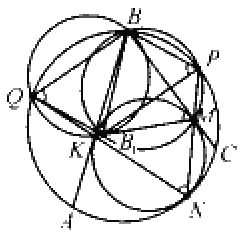
所以 $\triangle FEO\backsim\triangle PQB$,所以 $\angle OFE=\angle P$,

且 $FO:RP=EF:PQ=AB:RP$,所以 $FO \mathrel{\underline{\parallel}} AB$,所以 $FA \mathrel{\underline{\parallel}} OB$.

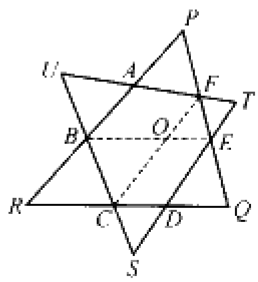
又 $CO/\!/DE$,所以 $\triangle COB\backsim\triangle STU$.

所以 $BC:US=CO:ST=OB:TU$,又 $CO=DE$,$OB=FA$.

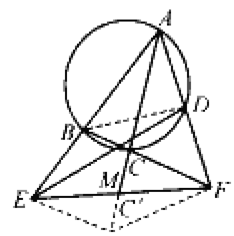
所以 $BC:US=DE:ST=FA:TU$.



第 2 题图



第 3 题图



第 4 题图

4. 证明　如图,若 M 为 EF 中点,延长 CM 至 C',使 $C'M=CM$,则四边形 $CEC'F$ 为平行四边形.

所以 $FC'/\!/DC$,$EC'/\!/BC$.

所以 $AD:AF=AC:AC'=AB:AE$,所以 $BD/\!/EF$.

所以 $\angle MEC=\angle BDC=\angle BAC$,

所以 $\triangle MEC\backsim\triangle MAE$,所以 $ME:MA=MC:ME$.

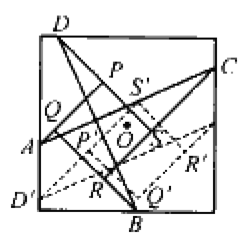
即　$MC\cdot MA=ME^2$,必要性得证.

充分性:若 $BD/\!/EF$,过点 E 作 $EC'/\!/BF$ 交 AC 于 C'.

则 $AC:AC'=AB:AE=AD:AF$. 所以 $C'F/\!/CD$.

所以 $EC'FC$ 是一个平行四边形.

所以 $ME/\!/MF$.



第 5 题图

5. 证明　如图,设大正方形的中心为 O,作变换 $R(0,90^\circ)$,设 $PQRS\to P'Q'R'S'$,则 $P'Q'R'S'$ 仍为一个正方形,且与正方形 $QRSP$ 的对应边平行,再设 $B\to B'$、$D\to D'$,则 D'、P'、S' 共线,B'、R'、Q' 共线,且 A、D' 与 B'、C 分别位于大正方形的两对边上,由于直线 $S'D'$ 与 PA 之间的距离等于直线 RC 与 $Q'B'$ 之间的距离,且 $AD'/\!/CB'$,所以

$AD'=CB'$，所以 $D'B' \underline{\parallel} AC$，又 $D'B' \perp DB$ 且 $D'B'=DB$

所以 $AC \perp BD$ 且 $AC=BD$.

6. 证明 如图，以 AC 的垂直平分线为反射轴作轴反射变换，则 $C \to A$，设 $B \to B'$，则 $B'A=BC$、$\angle B'AC=\angle ACB=80°$，

又 $\angle BAC=40°$，所以 $\angle B'AB=40°$.

又 $B'B \parallel AC$，所以 $\angle ABB'=\angle BAC=40°=\angle B'AB$.

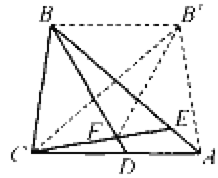
所以 $B'B=B'A=BC$.

由条件 $BC=BF$，$\angle FBB'=60°$，所以 $\triangle B'BF$ 为正三角形，

所以 $B'F=B'B=B'A$，所以点 B' 为 $\triangle ABF$ 的外心.

所以 $\angle BAF=\frac{1}{2}\angle BB'F=30°$. 又 $\angle ABC=60°$.

所以 $AF \perp BC$.



第 6 题图

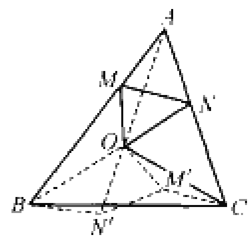
7. 证明 如图，设 N 关于 AB 的垂直平分线的对称点为 N'，M 点于 AC 的垂直平分线的对称点为 M'. 则 $BN'=AN$，$M'C=MA$.

因为 $\triangle ABC$ 的外心 O 是这两条垂直平分线的交点，所以 $ON'=ON$，$OM'=OM$，$\angle BON'=\angle NOA$，$\angle M'OC=\angle AOM$，

$\angle M'ON'=\angle BOC-\angle BON'-\angle M'OC=\angle BOC-\angle NOA-\angle AOM=2\angle NOM-\angle NOM=\angle NOM$.

所以 $\triangle M'ON' \cong \triangle MON$，所以 $M'N'=MN$.

所以 $\triangle AMN$ 的周长 $AN+NM+MA=BN'+N'M'+M'C \geqslant BC$.



第 7 题图

8. 证明 如图，连结 MP 并延长交 AD 于 P'，连结 SQ 并延长交 BC 于 Q'，连 $P'Q'$，则易知 $PQ \parallel P'Q'$. 取 AC 中点 O'，则 $OP' \parallel CD$，$OQ' \parallel AB$. 又 $MS \perp AB$，$MR \perp CD$.

所以 $MS \perp OQ'$，$MR \perp OP'$，所以 M、E、F、O 四点共圆.

所以 $\angle EMF=\angle EOF$，所以 $\angle SMR=\angle P'OQ'$.

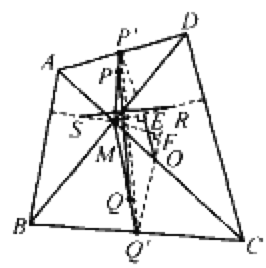
又 $SM=AB \cdot \cot\angle AMB$，$MR=CD \cdot \cot\angle CMD$.

所以 $\frac{SM}{MR}=\frac{AB}{CD}=\frac{OQ'}{OP'}$，

所以 $\triangle SMR \backsim \triangle Q'OP'$

所以将 $\triangle SMR$ 经过旋转位似变换后与 $\triangle Q'OP'$ 重合（逆时针旋转 90°）.

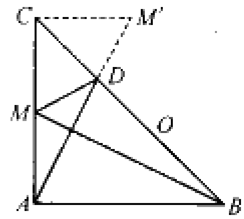
所以 $SR \perp P'Q'$，所以 $PQ \perp RS$.



第 8 题图

9. 证明 如图，设斜边 BC 的中点为 O，作变换 $R(O,-90°)$，则 $B \to A$，$A \to C$，设 $M \to M'$，则 $AM' \perp BM$.

又 $AD \perp BM$，所以 M' 在 AD 的延长线上，且 $CM'=AM$，$\angle CM'D=\angle AMB$.

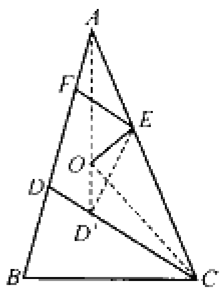


第 9 题图

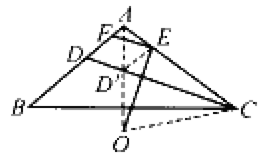
又 $CM' \perp AM$，所以 $\angle M'CD=\angle MCD=45°$.

所以 M 为 AC 的中点 $\Leftrightarrow AM=MC \Leftrightarrow CM'=CM \Leftrightarrow \triangle CM'D \cong \triangle CMD \Leftrightarrow \angle CM'D=\angle CMD \Leftrightarrow \angle AMB=\angle CMD$.

10. 证明　如图所示，作变换 $T(\overrightarrow{FE})$，则 $F \to E$，设 $D \to D'$，则 D' 在 DC 上，$ED' \mathrel{\underline{\parallel}} FD$，$\angle C'DE=\angle ADC=\angle B+\frac{1}{2}\angle C$.



第 10 题图(1)



第 10 题图(2)

又 $\angle OEC=90°-\frac{1}{2}\angle C$，$\angle ECO=\frac{1}{2}\angle A$，

所以 $\angle COE=180°-(90°-\frac{1}{2}\angle C)-\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle C+\angle B=\angle CD'E$.

所以 O、D'、C、E 共圆.

所以 $\angle D'OC=\angle D'EC=\angle A=\angle OAC+\angle ACO$，

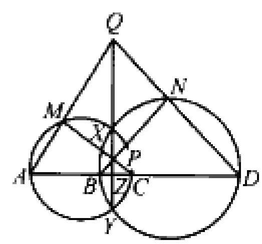
或 $\angle D'OC=180°-\angle D'EC=180°-\angle A=180°-(\angle OAC+\angle ACO)$.

所以 D'、O、A 共线.

又 $\angle ED'A=\angle ACO=\angle OAE$，所以 $AE=ED'=FD$.

第五章　平面几何中常用的解题方法

1. 证明(解析法)　引理　圆心不共线的三圆两两相交，则三条公共弦共点.



第 1 题图

设 $\odot O_i (i=1,2,3)$ 的方程为 $x^2+y^2+D_ix+E_iy+F_i=0$，将它们两两相减得公共弦方程

$L_1:(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$,

$L_2:(D_2-D_3)x+(E_2-E_3)y+F_2-F_3=0$,

$L_3:(D_3-D_1)x+(E_3-E_1)y+F_3-F_1=0.$

因为圆心不共线，故设 L_1 与 L_2 的交点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，显然 $P\in L_3$，即 L_1、L_2、L_1 交于点 P.

当 P 在线段 XY 上时，由圆幂定理得

$PM\cdot PC=PX\cdot PY=PN\cdot PB$，

故 M、N、C、B 四点共圆，$\angle NMC=\angle NBC$.

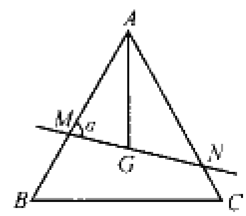
又 $\angle NBC+\angle NDA=90^\circ$，$\angle AMC=90^\circ$，

所以 $\angle AMN+\angle NDA=180^\circ$，

即 A、D、N、M 四点共圆，且圆心不在 AD 上.

由引理知公共弦 AM、DN、XY 共点于 Q.

2. 证明　如图，证法 1(三角函数法)：设 $\angle AMG=\alpha$，则 $\angle ANG=120^\circ-\alpha$.



第 2 题图

在 $\triangle AMG$ 和 $\triangle ANG$ 中，分别应用正弦定理，得

$$\frac{MG}{\sin30^\circ}=\frac{AG}{\sin\alpha},\frac{NG}{\sin30^\circ}=\frac{AG}{\sin(120^\circ-\alpha)},$$

而 $AG=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

从而 $MG=\frac{\sqrt{3}a}{6\sin\alpha}$，$NG=\frac{\sqrt{3}a}{6\sin(120^\circ-\alpha)}$，

$$\frac{1}{MG^2}-\frac{1}{MG\cdot NG}+\frac{1}{NG^2}$$

$$=\frac{36\sin^2\alpha-36\sin\alpha\sin(120^\circ-\alpha)+36\sin^2(20^\circ-\alpha)}{3a^2}$$

$=\frac{9}{a^2}$(定值)，命题得证.

证法 2(解析法)：以 AG 所在直线为 x 轴、A 为原点建立如图 5-17 所示直角坐标系，则直线 AB、AC 方程分别为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x,y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

又知 G 点坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}a,0\right)$，设直线 MN 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{3}a+t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha.\end{cases}$

代入直线 AB、AC 方程，分别得

$$M:t\sin\alpha=\frac{1}{3}a+\frac{\sqrt{3}}{3}t\cos\alpha;N:t\sin\alpha=-\frac{1}{3}a-\frac{\sqrt{3}}{3}t\cos\alpha.$$

从而 $MG=\left|\dfrac{\frac{1}{3}a}{\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha}\right|$，$NG=\left|\dfrac{\frac{1}{3}a}{\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha}\right|$．

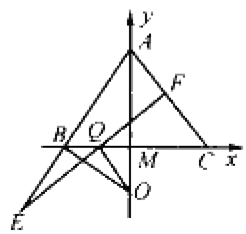
$$\frac{1}{MG^2}-\frac{1}{MG\cdot NG}+\frac{1}{NG^2}$$

$$=\frac{1}{9}a^2\left[\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha^2-\left|\left(\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha\right)\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha\right)\right|+\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha\right)^2\right]$$

$$=\frac{9}{a^2}.$$

说明　若将题中点 G 换成高 AD 上的任意点 P，设 $AP=k\cdot AD(0<k<1)$，则原命题仍成立．

3．证明（解析法）以 BC 中点 M 为原点，BC 所在直线为 x 轴，建立如图所示的直角坐标系．



第 3 题图

不妨设 $BC=2$，$\angle C=\angle B=\alpha$，$\angle FQC=\theta$，则 $OM=\cot\alpha$．

由正弦定理，得

$$\frac{QF}{\sin\alpha}=\frac{1+QM}{\sin(\alpha+\theta)},\ \frac{QE}{\sin\alpha}=\frac{1-QM}{\sin(\alpha-\theta)}.$$

充分性：当 $QF=QE$ 时，由上述两式，易知

$$QM=\frac{\sin(\alpha+\theta)-\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha-\theta)}=\cot\alpha\tan\theta,$$

所以 $k_{EF}\cdot k_{OQ}=\tan\theta\cdot\left(-\dfrac{OM}{QM}\right)$

$$=\tan\theta\cdot\left(-\frac{\cot\alpha}{\cot\alpha-\tan\theta}\right)=-1.$$

因此　$OQ\perp EF$．

必要性：当 $OQ\perp EF$ 时，由 $k_{EF}\cdot k_{OQ}=-1$，得

$QM=\cot\alpha\cdot\tan\theta$，代入上述两式，得

$$QF=\frac{1+\cot\alpha\cdot\tan\alpha}{\sin(\alpha+\theta)}\cdot\sin\alpha=\frac{1}{\cos\theta}.$$

同理 $QE=\dfrac{1}{\cos\theta}$，因此 $QE=QF$．

4．解　（复数法）以顶点 C 为原点，CA 为实轴建立复平面．

设 $|\overrightarrow{CA}|=r$，由复数乘除法的几何意义知，向量 $\overrightarrow{DB}$ 可以看作 $\overrightarrow{DA}$ 经旋转并延伸或缩短而得到．

由已知得

$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}\cdot\frac{|\overrightarrow{DB}|}{|\overrightarrow{DA}|}[\cos(\angle ACB+90^\circ)+\mathrm{i}\sin(\angle ACB+90^\circ)]$$

$$=\overrightarrow{DA}\cdot\frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{CA}|}[(\cos\angle ACB+\mathrm{i}\sin\angle ACB)\mathrm{i}]$$

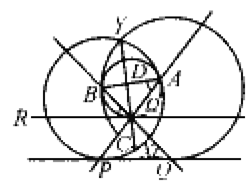
$$=\frac{1}{r}\cdot\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}\cdot\mathrm{i}=\frac{1}{r}(r-z_D)\cdot z_B\cdot\mathrm{i}.$$

又由$\overrightarrow{DB}=z_B-z_D$，得$\frac{1}{r}(r-z_D)\cdot z_B\cdot\mathrm{i}=z_B-z_D$，

解得 $z_D=\frac{r_B^2(1-\mathrm{i})}{r-z_B\mathrm{i}}$，

所以$\frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}=\frac{|z_B-r|\cdot|z_D|}{|r|\cdot|z_D-z_B|}=|1-\mathrm{i}|=\sqrt{2}.$

5. 剖析与解　设Ω是一个与给定两圆相切于A、B的圆，因为与直线XY相交，则与两给定的圆要么都外切，要么都内切. 内切时也有两种情况，不妨只对其中的一种情况给予证明.



第5题图

如图，设CA交圆AXY于P，CB交圆BXY于Q，则$CA\cdot CP=CX\cdot CY=CB\cdot CQ$. 所以$A$、$B$、$P$、$Q$四点共圆，于是$\angle CAB=\angle CQP$.

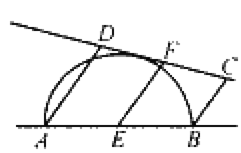
过C作圆Ω的切线CR，R与B在直线XY的同侧，则$\angle BCR=\angle CAB=\angle CQP$. 所以，$CR/\!/PQ$.

考虑分别以A和B为位似中心的两个位似变换，将圆Ω变为两个给定的圆. 以A为位似中心的位似变换将直线CR变为圆AXY在点P的切线，以B为位似中心的位似变换将直线CR变为圆BXY在点Q的切线，且这两条切线均平行于CR. 因此，这两条切线与直线PQ重合，即这两个圆的公切线. 所以CA、CB分别过点P、Q.

综上所述，两个给定圆的两条外公切线与这两个圆的四个切点即为满足条件的四个点.

6. 证明　如图，设E、F分别为AB、CD的中点，E到CD的距离为d_1，F到AB的距离为d_2，依题意有

$$d_1=\frac{1}{2}AB.\qquad ①$$



第6题图

(a)充分性　当$BC/\!/AD$时，EF为梯形$ABCD$的中位线，有$EF/\!/AD$，得面积　$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DEF}$

即　$\frac{1}{2}\cdot AE\cdot d_2=\frac{1}{2}\cdot DF\cdot d_1$.

把①代入

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot d_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}CD\cdot\frac{1}{2}AB,$$

得 $d_2=\frac{1}{2}CD.$

从而，直线 AB 与以 CD 为直径的圆相切.

(b)必要性 若直线 AB 与以 CD 为直径的圆相切，则 $d_2=\frac{1}{2}CD.$

但 $d_1=\frac{1}{2}AB,$

得 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DEF}=\frac{1}{8}AB\cdot AD,$

故 $AD/\!/EF.$

同理 $EF/\!/BC,$

得 $BC/\!/AD.$

7. 证明 引进复平面，以各点的字母表示各点上的复数，并设

$u=\cos 60^\circ+\mathrm{i}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$

依题意得

$P_n-A_n=(A_n-P_{n-1})\cdot u,(n=1,2,3,\cdots),$

移项、迭代，有

$$\begin{aligned}P_n&=(1+u)A_n-uP_{n-1}\\&=(1+u)A_n-u[(1+u)A_{n-1}-uP_{n-2}]\\&=(1+u)(A_n-uA_{n-1})+u^2P_{n-2}\\&\cdots\cdots\\&=(1+u)[A_n-uA_{n-1}+u^2A_{n-2}-u^3A_{n-3}+\cdots+(-u)^{n-1}A_1]+(-u)^nP_0.\end{aligned}$$

当 $n=1986$ 时，由于 $A_n=A_{n-3}, u^3=-1, u^2=u-1, A_{1986}=A_0,$

有 $$\begin{aligned}P_{1986}&=662(1+u)(A_3-uA_2+u^2A_1)+P_0\\&=662(1+u)[(A_3-A_1)-u(A_2-A_1)]+P_{1986},\end{aligned}$$

得 $A_3-A_1=u(A_2-A_1).$

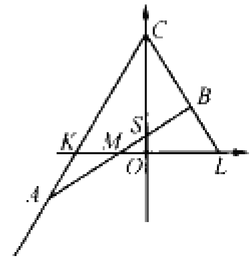
这说明，A_1A_3 可由 A_1A_2 绕 A_1 逆时针旋转 60° 得到，故 $\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形.

评注 本题是利用复数给予证明的，几何问题中若与旋转有关，可考虑复数解法.

8. 分析 由于 $\triangle CKL$ 为等腰△，S 为其外心，所以 $CS\perp KL$. 因此可选择用解析法.

证明 以 KL 为 x 轴，CS 为 y 轴建立直角坐标系，如图 5-22 所示，设 $L(1,0)$，$K(-1,0)$，$C(0,a)$，$M(b,0)$.

则直线 CB 方程为 $y=-ax+a$，直线 CA 方程 $y=ax+a$.



第 8 题图

因为 M 为线段 AB 中点，所以设 $A(b-c,-d)$，$B(b+c,d)$．

所以 $\begin{cases}-a(b+c)+a=d\\a(b-c)+a=d\end{cases}$ 得 $\begin{cases}c=1\\d=-ab\end{cases}$ 即 $\begin{matrix}B(b+1,-ab)\\A(b-1,ab)\end{matrix}$

所以 $AB:y=-abx+ab^2$，$CD:y=\dfrac{1}{ab}x+a$，

所以 $D\left(\dfrac{a^2b(b^2-1)}{1+a^2b^2},\dfrac{ab^2(a^2+1)}{1+a^2b^2}\right)$．

又 CL 的中垂线方程为 $y-\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{a}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $S\left(0,\dfrac{a^2-1}{2a}\right)$．

所以 $|SM|^2=\dfrac{a^4-2a^2+1+4a^2b^2}{4a^2}$

$$|SD|^2=\left[\frac{a^2b(b^2-1)}{1+a^2b^2}\right]^2+\left[\frac{ab^2(a^2+1)}{1+a^2b^2}-\frac{a^2-1}{2a}\right]^2$$

$$=\frac{1}{4a^2(1+a^2b^2)^2}\left[4a^6b^2(b^2-1)^2+(a^4b^2+3a^2b^2-a^2+1)^2\right]$$

$$=\frac{1}{4a^2(1+a^2b^2)^2}(a^8b^4+9a^4b^4+a^4+1-2a^6b^4+2a^6b^2+4a^6b^6-4a^4b^2+6a^2b^2-2a^2)$$

$$=\frac{1}{4a^2(1+a^2b^2)^2}\left[(a^4-2a^2+1+4a^2b^2)(1+2a^2b^2+a^4b^4)\right]$$

$$=\frac{a^4-2a^2+1+4a^2b^2}{4a^2}$$

所以 $|SM|^2=|SD|^2$，即 $|SM|=|SD|$．